数理解析研究所講究録
260巻 1976年 59-106

$SL(n;\mathbb{C})$ の Eisenstein 級数と概均質ベクトル空間

東大　理院　佐藤文広

Eisenstein級数の函数等式について、Langlandsの展開した理論が存在している。いま、その函数等式を数論的な方法で得ることを考えてみよう。$SL(2,\mathbb{R})$, $SL(2,\mathbb{C})$ などについては、よく知られている。rankの高い群については、$SL(n;\mathbb{R})$ に関して、Selbergの仕事を受けて Maass, A.Terras [6][10][11]の研究がなされている。ここでは、Maassの方法を概均質ベクトル空間の立場から見直して、ある種の多変数 Dirichlet 級数の函数等式と解析接続を証明する。(p24. 定理) その最も標準的な場合として、$SL(n;\mathbb{C})$ の不連続群 $SL(n;O_K)$ (O_K は類数1の虚二次体の整数環) に関する Eisenstein 級数の函数等式が得られる。

概均質ベクトル空間の Zeta函数の理論は、既約な相対不変式が唯一つに限られる(分離、定数倍を無視し)場合を除いて、一般的な議論は存在していない。ここで扱う多変数の Dirichlet 級数は、複

数の既約な相対不変式をもつ空間の Zeta 函数の一例となっている。

§1. 概均質ベクトル空間 $(G_{\mathbb{P}}, V)$ の定義

m, n $(1 \leq m < n)$ を自然数。$M(\nu, \mathbb{C}) \ni A$ に対し、$|A| = \det A$, $\|A\| = |\det A|$。$M(\nu; \mathbb{C}) \ni A$, $M(\nu, \mu; \mathbb{C}) \ni B$ に対し、$A[B] = {}^t\overline{B}AB$。

ν 個の自然数の組 $\mathbb{P} = (p_1, \cdots, p_\nu)$ は、$p_1 + \cdots + p_\nu = m$ のとき、(rank ν の) m の分割という。$\mathfrak{S}_\nu$ を ν 次対称群として、$\mathfrak{S}_\nu$ の $\mathbb{P}$ への作用を、

$$ {}^{\sigma}\mathbb{P} = (p_{\sigma(1)}, \cdots, p_{\sigma(\nu)}) \quad \left(\sigma = \begin{pmatrix} 1, & 2, & \cdots, & \nu \\ \sigma(1), & \sigma(2), & \cdots, & \sigma(\nu) \end{pmatrix} \in \mathfrak{S}_\nu \right) $$

で定める。

$$ k_{\mathbb{P}}^{(i)} = p_1 + \cdots + p_i, \quad k_{\mathbb{P}}^{*(i)} = p_{\nu-i+1} + \cdots + p_\nu \quad (i = 1, \cdots, \nu) $$

$$ E_{\mathbb{P}}^{(i)} = \begin{pmatrix} E_{k_{\mathbb{P}}^{(i)}} \\ O^{(k_{\mathbb{P}}^{(i)}, m-k_{\mathbb{P}}^{(i)})} \end{pmatrix}, \quad E_{\mathbb{P}}^{*(i)} = \begin{pmatrix} O^{(k_{\mathbb{P}}^{*(i)}, m-k_{\mathbb{P}}^{*(i)})} \\ E_{k_{\mathbb{P}}^{*(i)}} \end{pmatrix} $$

とおく。ただし、E_ν で ν 次単位行列、$O^{(\nu, \mu)}$ で ν 行 μ 列の零行列を表わした。

$GL(m; \mathbb{C})$ の parabolic 部分群 $B_{\mathbb{P}}$ を次のようにとる。

$$ B_{\mathbb{P}} = \left\{ \begin{pmatrix} b_{11} & & O \\ \vdots & \ddots & \\ b_{\nu 1} & \cdots & b_{\nu\nu} \end{pmatrix} \in GL(m; \mathbb{C}) \;\middle|\; \begin{array}{l} b_{ij} \in M(p_i, p_j; \mathbb{C}) \\ b_{ij} = 0 \quad (i < j) \end{array} \right\} $$

H を n 次正定値 Hermete 行列、$U(H)$ を H の unitary 群、すなわち、

$$ U(H) = \{ g \in GL(n; \mathbb{C}) \mid {}^t\overline{g} H g = H \} $$

$\tilde{U}(H)=\{(g,h)\in GL(n;\mathbb{C})\times GL(n;\mathbb{C}) \mid {}^t h H g = H\}$とおくと，$\tilde{U}(H)\cong GL(n;\mathbb{C})$で，

$$U(H)\ni g \longmapsto (g,\bar{g})\in \tilde{U}(H)$$

によって，$U(H)$は$\tilde{U}(H)$の$\mathbb{R}$-有理点のなすLie群とみなせる。

さて，我々の扱う概均質ベクトル空間は，次の空間である。

$$G_{\mathbb{P}}=\tilde{U}(H)\times B_{\mathbb{P}}\times B_{\mathbb{P}},\quad V=M(n,m;\mathbb{C})\times M(n,m;\mathbb{C})$$

$G_{\mathbb{P}}$のV上の表現ρを

$$\rho(h_1,h_2,b_1,b_2)(x_1,x_2)=(h_1x_1{}^tb_1,\ h_2x_2{}^tb_2)$$

$$((h_1,h_2)\in\tilde{U}(H),\ b_1,b_2\in B_{\mathbb{P}},\ x_1,x_2\in M(n,m;\mathbb{C}))$$

で定義すれば，$(G_{\mathbb{P}},\rho,V)$は，正則概均質ベクトル空間となっている。

$i=1,\cdots,\nu$に対して，

$$P_{\mathbb{P}}^{(i)}(x_1,x_2)=|{}^tx_2Hx_1[E_{\mathbb{P}}^{(i)}]| \qquad (x_1,x_2)\in V$$

$$\chi_{\mathbb{P}}^{(i)}(g)=|b_1[E_{\mathbb{P}}^{(i)}]|\cdot|b_2[E_{\mathbb{P}}^{(i)}]| \qquad g=(h_1,h_2,b_1,b_2)\in G_{\mathbb{P}}$$

とおけば，

$$P_{\mathbb{P}}^{(i)}(\rho(g)(x_1,x_2))=\chi_{\mathbb{P}}^{(i)}(g)P_{\mathbb{P}}^{(i)}(x_1,x_2)$$

が成立つ。すなわち，$P_{\mathbb{P}}^{(i)}$は，指標$\chi_{\mathbb{P}}^{(i)}$に対応する相対不変式であり，さらに，任意の相対不変式は，$P_{\mathbb{P}}^{(1)},\cdots,P_{\mathbb{P}}^{(\nu)}$の積として表わされる。

特異点集合は，

$$S_{\mathbb{P}} = \bigcup_{i=1}^{k} S_{\mathbb{P}}^{(i)}, \quad S_{\mathbb{P}}^{(i)} = \{(X_1, X_2) \in V \mid P_{\mathbb{P}}^{(i)}(X_1, X_2) = 0\}$$

で与えられる。言いかえれば、$V - S_{\mathbb{P}}$ は、$G_{\mathbb{P}}$ の単一の軌道である。

V 上に内積

$$\langle (X_1, X_2), (Y_1, Y_2) \rangle = \frac{1}{2} \mathrm{Tr}({}^t X_1 \cdot Y_2 + {}^t X_2 \cdot Y_1)$$

を考え、この内積で、V と双対空間 V^* とを同一視する。このとき反傾表現 ρ^* は、

$$\rho^*(h_1, h_2, b_1, b_2)(Y_1, Y_2) = ({}^t h_2^{-1} Y_1 b_2^{-1}, {}^t h_1^{-1} Y_2 b_1^{-1})$$

$$(h_1, h_2) \in \widetilde{U}(H), \quad b_1, b_2 \in B_{\mathbb{P}}, \quad Y_1, Y_2 \in M(n, m; \mathbb{C})$$

となる。すなわち、

$$\langle \rho(g)(X_1, X_2), \rho^*(g)(Y_1, Y_2) \rangle = \langle (X_1, X_2), (Y_1, Y_2) \rangle$$

$$g \in G_{\mathbb{P}}, \quad (X_1, X_2), (Y_1, Y_2) \in V$$

を満足する。$(G_{\mathbb{P}}, \rho^*, V)$ も正則概均質ベクトル空間であり、$i = 1, \cdots, k$ に対し、

$$Q_{\mathbb{P}}^{(i)}(Y_1, Y_2) = |{}^t Y_2 H^{-1} Y_1 [E_{\mathbb{P}}^{*(i)}]| \quad (Y_1, Y_2) \in V$$

$$\chi_{\mathbb{P}}^{*(i)}(g) = |b_1[E_{\mathbb{P}}^{*(i)}]|^{-1} \cdot |b_2[E_{\mathbb{P}}^{*(i)}]|^{-1} \quad g = (h_1, h_2, b_1, b_2) \in G_{\mathbb{P}}$$

とおけば、

$$Q_{\mathbb{P}}^{(i)}(\rho^*(g)(Y_1, Y_2)) = \chi_{\mathbb{P}}^{*(i)}(g) Q_{\mathbb{P}}^{(i)}(Y_1, Y_2)$$

が成立ち、任意の相対不変式は、$Q_{\mathbb{P}}^{(1)}, \cdots, Q_{\mathbb{P}}^{(i)}$ の積として表わされる。

$$S_{\mathbb{P}}^{*} = \bigcup_{i=1}^{\nu} S_{\mathbb{P}}^{*(i)}, \quad S_{\mathbb{P}}^{*(i)} = \{ (y_1, y_2) \in V \mid Q_{\mathbb{P}}^{(i)}(y_1, y_2) = 0 \}$$

が、$(G_{\mathbb{P}}, \rho^*, V)$ の特異点集合である。

相対不変式に対応する指標の間には、

$$\chi_{\mathbb{P}}^{(i)} \cdot (\chi_{\mathbb{P}}^{*(\nu-i)})^{-1} = \chi_{\mathbb{P}}^{(\nu)} = (\chi_{\mathbb{P}}^{*(\nu)})^{-1} \quad (i = 1, \cdots, \nu-1)$$

の関係がある。

$G_{\mathbb{P}}, V$ の real structure を、

$$(G_{\mathbb{P}})_{\mathbb{R}} = U(H) \times B_{\mathbb{P}} \ni (h, b) \longmapsto (h, \bar{h}, b, \bar{b}) \in G_{\mathbb{P}}$$

$$V_{\mathbb{R}} = M(n, m; \mathbb{C}) \ni X \longmapsto (X, \bar{X}) \in V$$

で定める。このとき、$(G_{\mathbb{P}}, \rho, V)$, $(G_{\mathbb{P}}, \rho^*, V)$ は、$\mathbb{R}$ 上定義された概均質ベクトル空間と考えられる。表現、相対不変式、指標の $\mathbb{R}$-有理点の空間への制限も同じ記号で表わすことにする。すなわち、

$$\rho(h, b)X = h \cdot X \cdot {}^t b, \quad \rho^*(h, b)Y = {}^t\bar{h}^{-1} Y \bar{b}_2^{-1}$$

$$P_{\mathbb{P}}^{(i)}(X) = H[X \cdot E_{\mathbb{P}}^{(i)}], \quad Q_{\mathbb{P}}^{(i)}(Y) = H^{-1}[Y \cdot E_{\mathbb{P}}^{*(i)}]$$

$$\chi_{\mathbb{P}}^{(i)}(h, b) = \| b[E_{\mathbb{P}}^{(i)}] \|^2, \quad \chi_{\mathbb{P}}^{*(i)}(h, b) = \| b[E_{\mathbb{P}}^{*(i)}] \|^{-2}$$

$$(X, Y \in M(n, m; \mathbb{C}), \ (h, b) \in U(H) \times B_{\mathbb{P}})$$

又、内積 $\langle\ ,\ \rangle$ の $V_{\mathbb{R}}$ への制限は、

$$\langle X, Y \rangle = \langle (X, \bar{X}), (Y, \bar{Y}) \rangle = \mathrm{Re}\, \mathrm{Tr}({}^t X \cdot \bar{Y})$$

$$(X, Y \in M(n, m; \mathbb{C}))$$

であり、これで、$V_{\mathbb{R}}$ と $V_{\mathbb{R}}^*$ とが同一視できる。特異点集合につい

では、

$$(S_{\mathbb{P}})_{\mathbb{R}} = (S_{\mathbb{P}}^{*})_{\mathbb{R}} = (S_{\mathbb{P}}^{(\kappa)})_{\mathbb{R}} = (S_{\mathbb{P}}^{*(\kappa)})_{\mathbb{R}}$$

$$= \{ X \in M(n.m:\mathbb{C}) = V_{\mathbb{R}} \mid \operatorname{rank} X \lneq m \}$$

となる。これは、$\mathbb{P}$に依存しないので、単にSと書こう。

以下では、$\mathbb{R}$－有理点の空間のみを考えるから、$(\ )_{\mathbb{R}}$を省略する。

§2、ここでは、後に必要となる幾かの積分計算について述べる。

$H^{\circ} = \{ W \in M(m:\mathbb{C}) \mid {}^t\overline{W} = W > 0 \}$ 。

$\pi : V - S \longrightarrow H^{\circ}$ (resp. $\pi^{*} : V - S \longrightarrow H^{\circ}$) を $\pi(X) = H[X]$ (resp. $\pi^{*}(X) = H^{-1}[X]$) と定義する。

$H^{\circ} \ni W = (w_{ij})$ に対し、$dW = \prod_{i=1}^{m} dw_{ii} \prod_{i>j} d\mathrm{Re}\, w_{ij} \cdot d\mathrm{Im}\, w_{ij}$ 。

$H^{\circ} \ni W_0$ を定めたとき、$dX = \theta_{W_0} \wedge \pi^{-1}(dW)$ (resp. $dX = \theta^{*}_{W_0} \wedge \pi^{*-1}(dW)$) となる form θ_{W_0} (resp. $\theta^{*}_{W_0}$) が、$\pi^{-1}(W_0)$ (resp. $\pi^{*-1}(W_0)$) 上に unique に定まる。θ_{W_0} (resp. $\theta^{*}_{W_0}$) で定まる $\pi^{-1}(W_0)$ (resp. $\pi^{*-1}(W_0)$) 上の measure を、$|\theta_{W_0}|$ (resp. $|\theta^{*}_{W_0}|$) と記す。

<u>補題1.</u> (i) $$\int_{\pi^{-1}(W_0)} |\theta_{W_0}| = |H|^{-m} \cdot |W_0|^{n-m} \frac{\pi^{\frac{m(2n-m+1)}{2}}}{\prod_{i=1}^{m} \Gamma(n-m+i)}$$

(ii) $$\int_{\pi^{*-1}(W_0)} |\theta^{*}_{W_0}| = |H|^{m} |W_0|^{n-m} \cdot \frac{\pi^{\frac{m(2n-m+1)}{2}}}{\prod_{i=1}^{m} \Gamma(n-m+i)}$$

この積分計算はよく知られている。例えば，Siegel [9] で，対称行列について行っている計算法を応用する。詳細は略す。

$b \in B_{\mathbb{P}}$ を

$$b = \begin{pmatrix} b_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & b_r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{p_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ b_{ij} & & E_{p_r} \end{pmatrix} \quad b_i = b_{ij} \in GL(p_i; \mathbb{C}),\ b_{ij} \in M(p_i, p_j; \mathbb{C})$$

と分解する。$b_{ij}\ (i \geqq j)$ を $b_{ij} = (b^{(k_{ij}, l_{ij})})$ と成分表示して，

$$db = \prod_{i=1}^{r} \| b_i \|^{-2m + 4 k_{\mathbb{P}}^{(i-1)}} \prod_{i \geqq j} db_{ij}$$

$$db_{ij} = \prod_{\substack{1 \leqq k_{ij} \leqq p_i \\ 1 \leqq l_{ij} \leqq p_j}} d\mathrm{Re}\, b^{(k_{ij}, l_{ij})}\, d\mathrm{Im}\, b^{(k_{ij}, l_{ij})}$$

$$k_{\mathbb{P}}^{(0)} = 0$$

とおくと，db は，$B_{\mathbb{P}}$ の right invariant measure を与える。

$W_0 \in \mathcal{H}^0$ に対し，

$$(B_{\mathbb{P}})_{W_0} = \{ b \in B_{\mathbb{P}} \mid \bar{b} W_0 {}^t b = W_0 \}$$

$$(B_{\mathbb{P}})^*_{W_0} = \{ b \in B_{\mathbb{P}} \mid {}^t b W_0 \bar{b} = W_0 \}$$

とおく。$(B_{\mathbb{P}})_{W_0}$ (resp. $(B_{\mathbb{P}})^*_{W_0}$) は，$(B_{\mathbb{P}})_{E_m}$ (resp. $(B_{\mathbb{P}})^*_{E_m}$) と共役である。簡単な計算で，

$$(B_{\mathbb{P}})_{E_m} = (B_{\mathbb{P}})^*_{E_m} = \left\{ \begin{pmatrix} A_1^{(p_1)} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_r^{(p_r)} \end{pmatrix} \,\middle|\, A_i \in U(E_{p_i}) \right\}$$

$$\cong U(E_{p_1}) \times \cdots \times U(E_{p_r}) \quad .$$

$B_{\mathbb{P}}$ を $\mathcal{H}^0$ に，$W \longmapsto \bar{b} W {}^t b$ (resp. $W \longmapsto {}^t b^{-1} W \bar{b}^{-1}$) と作用させる。$\mathcal{H}^0$ 上の $B_{\mathbb{P}}$-相対不変測度を

$$\widetilde{dW} = \prod_{i=1}^{r-1} |W[E_{\mathbb{P}}^{(i)}]|^{-p_i - p_{i+1}} \cdot |W|^{-p_r}\, dW$$

$$(\text{resp. } \widetilde{dW}^* = \prod_{i=1}^{k-1} |W[E_p^{*(i)}]|^{-p_{k-i}-p_{k-i+1}} \cdot |W|^{-q_1} dW)$$

と定める。このとき，compact群 $(B_p)_{W_0}$ (resp. $(B_p)^*_{W_0}$) の Haar measure $d\nu_{W_0}$ (resp. $d\nu^*_{W_0}$) を

$$db = \widetilde{dW} \cdot d\nu_{W_0} \qquad (\text{resp. } db = \widetilde{dW}^* \cdot d\nu^*_{W_0})$$

を満足するように正規化できる。

補題2. $$\int_{(B_p)_{W_0}} d\nu_{W_0} = \int_{(B_p)^*_{W_0}} d\nu^*_{W_0} = \frac{\pi^{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k} p_i^2 + \frac{m}{2}}}{\prod_{i=1}^{k}\prod_{j=1}^{p_i} \Gamma(j)} \qquad (W_0 \in \mathfrak{H}^0)$$

(∵) 積分値が W_0 のとり方によらないことは，db，$\widetilde{dW}$，$\widetilde{dW}^*$ の，B_p-相対不変性からの結論である。よって，$W_0 = E_m$ としてよい。

$\pi_i : M(p_i ; \mathbb{C}) \longrightarrow \mathfrak{H}_0^{(p_i)} = \{W \in M(p_i;\mathbb{C}) \mid {}^t\overline{W} = W > 0\}$ を，$\pi_i(X) = \overline{X}^t X$ で定義し，$dX = \theta_i \wedge \pi_i^{-1}(dW)$ $(X \in M(p_i;\mathbb{C}),\ W \in \mathfrak{H}_0^{(p_i)})$ なる form θ_i によって $U(E_{p_i})$ 上の measure $|\theta_i|$ を定める。

$(B_p)_{E_m} = (B_p)^*_{E_m} = U(E_{p_1}) \times \cdots \times U(E_{p_k})$ で，実は，

$$d\nu_{E_m} = d\nu^*_{E_m} = |\theta_1| \cdots |\theta_k|$$

である。従って，補題1によって求める積分値を得る。　//

$V-S$ 上の G_p-相対不変測度，$\omega_p(X)$，$\omega^*_p(X)$ を，

$$\omega_p(X) = \prod_{i=1}^{k} P_p^{(i)}(X)^{-p_i - p_{i+1}} dX \qquad (p_{k+1} = n-m)$$

$$\omega^*_p(X) = \prod_{i=1}^{k} Q_p^{(i)}(X)^{-p_{k-i}-p_{k-i+1}} dX \qquad (p_0 = n-m)$$

$$X = (x_{ij}) \in M(n,m;\mathbb{C}),\quad dX = \prod_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le m}} d\mathrm{Re}\,x_{ij}\, d\mathrm{Im}\,x_{ij}$$

とする。

補題3

(i) $$\int_{V-S} \prod_{i=1}^{k} P_{\mathbb{P}}^{(i)}(x)^{s_i} \cdot e^{-\pi \operatorname{tr} H[X]} \, \omega_{\mathbb{P}}(x)$$
$$= \frac{\pi^{-\sum_{i=1}^{k} k_{\mathbb{P}}^{(i)} s_i + mn}}{|H|^{m} \cdot \prod_{i=1}^{m} \Gamma(n-m+i)} \prod_{i=1}^{k} \prod_{j=0}^{p_i-1} \Gamma(s_i+\cdots+s_k - k_{\mathbb{P}}^{*(k-i)} - j)$$

(ii) $$\int_{V-S} \prod_{i=1}^{k} Q_{\mathbb{P}}^{(i)}(x)^{s_i} \, e^{-\pi \operatorname{tr} H^{-1}[x]} \, \omega_{\mathbb{P}}^{*}(x)$$
$$= \frac{|H|^{m} \cdot \pi^{-\sum_{i=1}^{k} k_{\mathbb{P}}^{*(i)} s_i + mn}}{\prod_{i=1}^{m} \Gamma(n-m+i)} \cdot \prod_{i=1}^{k} \prod_{j=0}^{p_{k-i+1}-1} \Gamma(s_i+\cdots+s_k - k_{\mathbb{P}}^{(k-i)} - j)$$

(ii) 全く同様だから(i)のみ示す。

$\omega(x) = |W|^{m-n} \widetilde{dW} \cdot |\theta_W|$。補題1によって、

$$積分 = \frac{\pi^{\frac{1}{2} m(2n-m+1)}}{|H|^{m} \cdot \prod_{i=1}^{m} \Gamma(n-m+i)} \int_{\mathcal{H}^{0}} e^{-\pi \operatorname{tr} W} \prod_{i=1}^{k} |W[E_{\mathbb{P}}^{(i)}]|^{s_i} \, \widetilde{dW}$$

$\mathcal{H}^{0} \ni W$ を、$W = \begin{pmatrix} W^{(m-1)} & 0 \\ 0 & w_m \end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix} E_{m-1} & \mathbf{a} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]$ ($\mathbf{a} \in \mathbb{C}^{m-1}$, $w_m \in \mathbb{R}_+$, $W^{(m-1)} = {}^t\overline{W^{(m-1)}} > 0$) と分解すると、$p_k \geqq 2$ ならば、

$$\widetilde{dW} = |W^{(m-1)}| \cdot \widetilde{dW^{(m-1)}} \cdot d\mathbf{a} \cdot w_m^{-p_k} \, dw_m \quad 。$$

ここで、$\widetilde{dW^{(m-1)}}$ は、$m-1$ の分割 $(p_1, \cdots, p_{k-1}, p_k - 1)$ に関して、$\widetilde{dW}$ と同様に構成する。又、$\mathbf{a} = {}^t(a_1, \cdots, a_{m-1})$ に対し、$d\mathbf{a} = \prod_{i=1}^{m-1} d\mathrm{Re}\, a_i \, d\mathrm{Im}\, a_i$ とした。

$$\therefore \int_{\mathcal{H}^{0}} e^{-\pi \operatorname{tr} W} \prod_{i=1}^{k} |W[E_{\mathbb{P}}^{(i)}]|^{s_i} \, \widetilde{dW}$$

$$= \int_{H_0^{(m-1)}} e^{-\pi \operatorname{tr} W^{(m-1)}} \prod_{i=1}^{m} |W^{(m-1)}[E_{P'}^{(i)}]|^{s_i} \widetilde{dW}^{(m-1)}$$

$$\times \int_{\mathbb{C}^{m-1}} e^{-\pi \operatorname{tr} W^{(m-1)}[a]} \cdot |W^{(m-1)}| \, da \cdot \int_0^\infty w_m^{s_k - p_k} e^{-\pi w_m} dw_m$$

$$= \pi^{-(s_k - p_k + 1)} \Gamma(s_k - p_k + 1) \int_{H_0^{(m-1)}} e^{-\pi \operatorname{tr} W^{(m-1)}} \prod_{i=1}^{k} |W^{(m-1)}[E_{P'}^{(i)}]|^{s_i} \widetilde{dW}^{(m-1)}$$

ただし、$P' = (p_1, \cdots, p_{k-1}, p_k - 1)$。

$p_k = 1$ の場合には、同様の考察で、$P' = (p_1, \cdots, p_{k-1})$ に対し、

$$\int_{H^0} e^{-\pi \operatorname{tr} W} \prod_{i=1}^{k} |W[E_{P}^{(i)}]|^{s_i} \widetilde{dW}$$

$$= \pi^{-s_k} \Gamma(s_k) \int_{H_0^{(m-1)}} e^{-\pi \operatorname{tr} W^{(m-1)}} \prod_{i=1}^{k-2} |W^{(m-1)}[E_{P'}^{(i)}]|^{s_i} \cdot |W^{(m-1)}|^{s_{k-1} + s_k - 1} \widetilde{dW}^{(m-1)}$$

この2つの漸化式によって、帰納的に(i)が得られる。 //

§3. 相対不変式の複素巾の満足する函数等式

この節では、$\prod_{i=1}^{\nu} P_{\mathbb{P}}^{(i)}(x)^{s_i}$, $\prod_{i=1}^{\nu} Q_{\mathbb{P}}^{(i)}(x)^{s_i}$ $((s_1,\cdots,s_\nu)\in\mathbb{C}^\nu)$ が、2つ Type の函数等式を持つことを示す。第一の Type は、Fourier 変換に基くものであり、第二の Type は、本質的には、$SL(n;\mathbb{C})$ の帯球函数の函数等式である。

$\mathcal{S}(V)$ を V 上の急減少函数の空間とする。$s=(s_1,\cdots,s_\nu)\in\mathbb{C}^\nu$、$f\in\mathcal{S}(V)$ に対して、

$$\Phi_{\mathbb{P}}(s,f) = \int_{V-S} \prod_{i=1}^{\nu} P_{\mathbb{P}}^{(i)}(x)^{s_i} f(x)\,\omega_{\mathbb{P}}(x)$$

$$\Phi_{\mathbb{P}}^{*}(s,f) = \int_{V-S} \prod_{i=1}^{\nu} Q_{\mathbb{P}}^{(i)}(x)^{s_i} f(x)\,\omega_{\mathbb{P}}^{*}(x)$$

と定義すれば、$\Phi_{\mathbb{P}}(s,f)$ (resp. $\Phi_{\mathbb{P}}^{*}(s,f)$) は、$\mathrm{Re}(s_i) > p_i + p_{i+1}$ (resp. $\mathrm{Re}(s_i) > p_{\nu-i}+p_{\nu-i+1}$) $(i=1,\cdots,\nu)$ で絶対収束し、さらに、$\mathbb{C}^\nu$ 全体に有理型函数として解析接続される (cf. [1])。

$f\in\mathcal{S}(V)$ の Fourier 変換を、

$$\hat{f}(x) = \int_V f(y)\, e^{2\pi\sqrt{-1}\langle x,y\rangle}\, dy$$

で定義する。

<u>命題1</u>. 次の函数等式が成立つ。

$$\Phi_{\mathbb{P}}(s,\hat{f}) = |H|^{m}\, \pi^{-2\sum_{i=1}^{\nu} k_{\mathbb{P}}^{(i)} s_i + m(n-1)}$$

$$\times \prod_{i=1}^{\nu}\prod_{j=0}^{p_i-1} \sin\pi(s_i+\cdots+s_\nu - mk_{\mathbb{P}}^{(i)} - j)\,\Gamma(s_i+\cdots+s_\nu - n + k_{\mathbb{P}}^{(i)} - j)\,\Gamma(s_i+\cdots+s_\nu - k_{\mathbb{P}}^{*(\nu-i)} - j)$$

$$\times\, \Phi_{\mathbb{P}}^{*}(s_{\nu-1},\cdots,s_1, n-s_1-\cdots-s_\nu ; f)$$

この Type の函数等式は、[4], [7] で論じられている。空間 $(G_{\mathbb{P}}, V)$ は、そこでの仮定を満足しないが、[7] の才2章の議論を修正して、$\Phi_{\mathbb{P}}(s; \hat{f}) = c(s)\, \Phi^*_{\mathbb{P}}(s_{r-1}, \cdots, s_1, n-s_1-\cdots-s_r; f)$ なる $c(s)$ の存在を示せる。([7] p158, 例9は関係が深い)。$c(s)$ の具体的な決定は、補題3の積分を利用すれば、

$$\int_V e^{-\pi \operatorname{tr} T H(y)} e^{2\pi i \langle x, y\rangle} dy = |H|^{m} e^{-\pi \operatorname{tr} T(x)}$$

により実行できる。

Micro local calculus の方法によって、$(G_{\mathbb{P}}, V)$ を含む一般的な空間について、相対不変式の複素巾の Fourier 変換を求めることは、室氏によって研究されている([5])。

才二の Type の函数等式を記述するため、次の変数変換を行う。

$$(\sharp)\begin{cases} s_1 = z_2 - z_1 + \dfrac{p_1+p_2}{2} \\ s_2 = z_3 - z_2 + \dfrac{p_2+p_3}{2} \\ \cdots\cdots \\ s_{r-1} = z_r - z_{r-1} + \dfrac{p_{r-1}+p_r}{2} \\ s_r = -z_r + \dfrac{p_r+n-m}{2} \end{cases} \qquad (\flat)\begin{cases} s_1 = z_r - z_{r-1} + \dfrac{p_{r-1}+p_r}{2} \\ s_2 = z_{r-1} - z_{r-2} + \dfrac{p_{r-2}+p_{r-1}}{2} \\ \cdots\cdots \\ s_{r-1} = z_2 - z_1 + \dfrac{p_1+p_2}{2} \\ s_r = z_1 + \dfrac{p_1+n-m}{2} \end{cases}$$

$\Phi_{\mathbb{P}}(s, f)$ (resp $\Phi^*_{\mathbb{P}}(s; f)$) を変数変換 $(\sharp)$ (resp $(\flat)$) によって、$z_1, \cdots, z_r$ の函数とみたとき、$\Phi_{\mathbb{P}}(z_1, \cdots, z_r; f)$ (resp. $\Phi^*_{\mathbb{P}}(z_1, \cdots, z_r; f)$) と記すことにする。

命題2

$$\tilde{C}_0^\infty(V-S)=\{f\in C_0^\infty(V-S)\mid \mathrm{supp} f \text{ は compact},\ f(x^t k)=f(x),\ {}^\forall x\in V-S,\ k\in U(E_m)\}$$

とおく。$f\in\tilde{C}_0^\infty(V-S)$ ならば、任意の $\sigma=\begin{pmatrix}1, & \cdots, & k\\ \sigma(1), & \cdots, & \sigma(k)\end{pmatrix}\in\mathfrak{S}_k$ について、

$$\Phi_P(z_1,\cdots,z_k;f)=\Phi_{\sigma P}(z_{\sigma(1)},\cdots,z_{\sigma(k)};f)$$

$$\Phi_P^*(z_1,\cdots,z_k;f)=\Phi_{\sigma P}^*(z_{\sigma(1)},\cdots,z_{\sigma(k)};f)$$

が成立つ。

証明のため、次の2つの補題を用意する。

補題4 (Harish-Chandra)

$$A=\left\{\begin{pmatrix}a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_m\end{pmatrix}\ \middle|\ \begin{matrix}a_i\in\mathbb{R}_+\\ a_1\cdots a_m=1\end{matrix}\right\}.$$ $A\ni a=\begin{pmatrix}a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_m\end{pmatrix}$ に対し、$e^{\rho(\log a)}=\prod_{i=1}^m a_i^{-(m-2i+1)}$ とする。$N=\left\{\begin{pmatrix}1 & & 0\\ & \ddots & \\ n_{ij} & & 1\end{pmatrix}\ \middle|\ n_{ij}\in\mathbb{C}\right\}$. N 上の measure を $dn=\prod_{i>j} d\mathrm{Re}\,n_{ij}\,d\mathrm{Im}\,n_{ij}$ で定める。

$SL(m;\mathbb{C})$ 上の台が compact な連続函数 f について、

$$F_f(a)=e^{\rho(\log a)}\int_N f(an)\,dn \qquad a\in A$$

とおく。このとき、f が、任意の $k\in SU(m)$ に対し、

$$f(kgk^{-1})=f(g) \qquad g\in SL(m;\mathbb{C})$$

を満足すれば、

$$F_f(a^\sigma)=F_f(a) \qquad \sigma\in\mathfrak{S}_m$$

但し、$\sigma=\begin{pmatrix}1, & \cdots, & m\\ \sigma(1), & \cdots, & \sigma(m)\end{pmatrix}$ について、

$$a=\begin{pmatrix}a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_m\end{pmatrix}\longmapsto\begin{pmatrix}a_{\sigma(1)} & & \\ & \ddots & \\ & & a_{\sigma(m)}\end{pmatrix}=a^\sigma$$

(∵) 半単純 Lie 群についての一般的な定理 (例えば [3] Ch.X. Theorem 1.15) を $SL(m;\mathbb{C})$ について書き下しただけである。 //

補題5. $f \in \tilde{C}_0^\infty(V-S)$. $V-S \ni X_0$ を $H[X_0]=E_m$ ととる。dh を $U(H)$ 上の Haar measure とし、$\int_{U(H)} dh = 1$ と正規化する。

このとき $f_t(g) = \int_{U(H)} f(hX_0{}^tg\cdot t)\,dh \quad (t \in \mathbb{R}_+,\ g \in SL(m;\mathbb{C}))$

と定義すると、$f_t(g)$ は、$SL(m;\mathbb{C})$ 上の台が compact な連続函数で $f_t(kgk^{-1}) = f(g)$ $(k \in SU(m),\ g \in SL(m;\mathbb{C}))$ を満足する。

(∵) f_t が連続であることは明らか。$U(H)\cdot \mathrm{supp} f = C$ とおくと C は $V-S$ の compact set で

$$\mathrm{supp}(f_t) \subset \{ g \in SL(m;\mathbb{C}) \mid X_0 t\,{}^tg \in C \}.$$

この左辺は compact. ∴ $\mathrm{supp}(f_t)$ も compact。

$$f_t(kgk^{-1}) = \int_{U(H)} f(hX_0{}^tk^{-1}{}^tg\cdot t\,{}^tk)\,dh.$$

$k \in SU(m)$ より、$H[X_0{}^tk^{-1}] = E_m$。よって、$h_0X_0 = X_0{}^tk^{-1}$ となる $h_0 \in U(H)$ が存在する。

$$\therefore\ f_t(kgk^{-1}) = \int_{U(H)} f(hh_0X_0{}^tg\cdot t\,{}^tk)\,dh$$

$$= \int_{U(H)} f(hX_0{}^tg\cdot t)\,dh = f_t(g)$$

//

命題2の証明にかえる。

$\mathbb{R}_+$を、$\mathbb{R}_+ \ni t = \begin{pmatrix} t & & \\ & \ddots & \\ & & t \end{pmatrix}$と同一視する。

$$B^+(m) = \mathbb{R}_+ \times A \cdot N = \left\{ t \cdot \begin{pmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ n_{ij} & & 1 \end{pmatrix} \middle| \begin{array}{l} t \in \mathbb{R}_+ \quad a_1 \cdots a_m = 1 \\ a_i \in \mathbb{R}_+ \quad n_{ij} \in \mathbb{C} \end{array} \right\}$$

積分$\Phi_{\mathbb{P}}(z:f)$を群$B^+(m)$上の積分に書きかえよう。

任意の$h \in U(H)$に対して、

$$\Phi_{\mathbb{P}}(s_1, \cdots s_r : f) = \int_{V-S} \prod_{i=1}^{r} P_{\mathbb{P}}^{(i)}(x)^{s_i} \cdot f(hx)\, \omega_{\mathbb{P}}(x) \text{。}$$

$U(H)$上で積分すると、

$$\Phi_{\mathbb{P}}(s_1, \cdots s_r : f) = \int_{V-S} \prod_{i=1}^{r} P_{\mathbb{P}}^{(i)}(x)^{s_i - p_i - p_{i+1}} \int_{U(H)} f(hx)\, dh\, dx.$$

被積分函数は$U(H)$-不変であるから、

$$\int_{U(H)} f(hx)\, dh = f_1 \circ \pi(x) \qquad (x \in V-S)$$

を満たす$f_1 \in C_0^\infty(H_0)$が存在し、補題1より、

$$\Phi_{\mathbb{P}}(s_1, \cdots s_r : f) = |H|^{-m} \cdot \frac{\pi^{\frac{m}{2}(2n-m+1)}}{\prod_{i=1}^{m} \Gamma(n-m+i)} \int_{H^0} \prod_{i=1}^{r} |w[E_{\mathbb{P}}^{(i)}]|^{s_i} f_1(w)\, \widehat{dw}$$

さて、$\psi : B^+(m) \xrightarrow{\sim} H^0$ なる homeomorphism を $\psi(b) = {}^t\bar{b}b$ で定義する。$d^\times t = \frac{dt}{|t|}$、$da = \prod_{i=1}^{m-1} \frac{da_i}{|a_i|}$を、それぞれ$\mathbb{R}_+$、$A$上の Haar measure とする。このとき、

$$\psi^*(\widehat{dw}) = 2^m \prod_{i=1}^{r} \prod_{j=0}^{p_i - 1} a_{k_{\mathbb{P}}^{(i)} - j}^{-2(k_{\mathbb{P}}^{*(r-i)} + k_{\mathbb{P}}^{*(r-i+1)})} d^\times t\, da\, dn\text{。}$$

又、

$$\prod_{i=1}^{r} |w[E_{\mathbb{P}}^{(i)}]|^{s_i} = t^{-2\sum_{i=1}^{r} p_i z_i + m(n+m)} \times \prod_{i=1}^{r} \prod_{j=0}^{p_i - 1} a_{k_{\mathbb{P}}^{(i)} - j}^{-2z_i + (k_{\mathbb{P}}^{*(r-i)} + k_{\mathbb{P}}^{*(r-i+1)})}$$

$$\therefore \Phi_P(z_1,\cdots,z_k ; f)=\frac{2^m \pi^{\frac{m}{2}(2n-m+1)}}{\prod_{i=1}^{m}\Gamma(n-m+i)}\cdot |H|^{-m}\int_{\mathbb{R}_+} t^{-2\sum_{i=1}^{k}p_i z_i+m(n+m)}\,d^\times t$$

$$\int_A \prod_{i=1}^{k}\prod_{j=0}^{p_i-1} a_{k_P^{(i)}-j}^{-2z_i-(k_P^{*(k-i)}+k_P^{*(k-i+1)})}\,da\int_N f_1(t\cdot a\bar{n}\,{}^t n a t)\,dn .$$

さて、$\displaystyle\prod_{i=1}^{k}\prod_{j=0}^{p_i-1} a_{k_P^{(i)}-j}^{-2z_i-(k_P^{*(k-i)}+k_P^{*(k-i+1)})}\cdot e^{-\rho(\log a)}$

$$=\prod_{i=1}^{k}\prod_{j=0}^{p_i-1} a_{k_P^{(i)}-j}^{-2z_i-(k_P^{*(k-i)}+k_P^{*(k-i+1)})+\{m-2(k_P^{(i)}-j)+1\}}$$

$$=\prod_{i=1}^{k}\prod_{j=0}^{p_i-1} a_{k_P^{(i)}-j}^{-2z_i-p_i+2j} .$$

よって、f_1の定義にもどれば、

$$\Phi_P(z_1,\cdots,z_k ; f)=\frac{2^m \pi^{\frac{m}{2}(2n-m+1)}}{\prod_{i=1}^{m}\Gamma(n-m+i)}\cdot |H|^{-m}\int_{\mathbb{R}_+} t^{-2\sum_{i=1}^{k}p_i z_i+m(n+m)}\,d^\times t$$

$$\times\int_A \prod_{i=1}^{k}\prod_{j=0}^{p_i-1} a_{k_P^{(i)}-j}^{-2z_i-p_i+2j}\,da\cdot e^{\rho(\log(a))}\int_N\int_{U(H)} f(kX_0\,{}^t n a t)\,dk\,dn$$

ここで X_0 は $\pi(X_0)=H[X_0]=E_m$ となる $V-S'$ の元である。

補題4.5より、$e^{\rho(\log a)}\int_N\int_{U(H)} f(kX_0\,{}^t n a t)\,dk\,dn$ は、A 上の関数として $(a_1,\cdots,a_m)$ の任意の置換で不変である。いま、$\mathfrak{S}_k$ を次のようにして $\mathfrak{S}_m$ に埋めこむ。すなわち $\sigma=\begin{pmatrix}1,&\cdots,&k\\ \sigma(1),&\cdots,&\sigma(k)\end{pmatrix}$ を

$$(\overbrace{1,2,\cdots,p_1}^{p_1},\overbrace{p_1+1,\cdots,p_1+p_2}^{p_2},\cdots,\overbrace{k_P^{(k-1)}+1,\cdots,m}^{p_k})$$

$$\longmapsto(\overbrace{k_P^{(\sigma(1)-1)}+1,\cdots,k_P^{\sigma(1)}}^{p_{\sigma(1)}},\cdots,\overbrace{k_P^{(\sigma(k)-1)}+1,\cdots,k_P^{\sigma(k)}}^{p_{\sigma(k)}}) .$$

と同一視して、$\mathfrak{S}_m$ の元とみなす。言いかえれば $1\sim m$ を $p_1,\cdots,p_k$

個の k-ブロックにわけ、各ブロック内での順序を変えず、ブロックを入れかえる置換とみなす。

このとき、上の積分表示は、

$$(z_1, \cdots, z_k) \longmapsto (z_{\sigma(1)}, \cdots, z_{\sigma(k)})$$

$$\mathfrak{p} = (p_1, \cdots, p_k) \longmapsto (p_{\sigma(1)}, \cdots, p_{\sigma(k)}) = \mathfrak{p}^{\sigma}$$

$$(a_1, \cdots, a_m) \longmapsto (a_{\sigma(1)}, \cdots, a_{\sigma(m)})$$

の変換で不変である。これは、$\Phi_{\mathfrak{p}}(z_1, \cdots, z_k ; f) = \Phi^{*}_{\mathfrak{p}^{\sigma}}(z_{\sigma(1)}, \cdots, z_{\sigma(k)} ; f)$ を意味している。$\Phi^{*}_{\mathfrak{p}}$ についても同様である。 //

<u>Rem.</u> 以上の証明は、実質的には、球函数の函数等式の証明（例えば [3] の chap X. Proposition 6-D）を follow したことに他ならない。

§4. $(G_{\mathfrak p}, V)$ の Zeta 函数

Kを類数1の虚二次体、$\mathcal{O}_K$ をKの整数環として、$V_{\mathbb Q}=M(n,m;K)$, $B_{\mathfrak p}(\mathbb Q)=B_{\mathfrak p}\cap GL(m;K)$, $B_{\mathfrak p}(\mathbb Z)=B_{\mathfrak p}\cap GL(m;\mathcal{O}_K)$ とおく。

$V_{\mathbb Q}$ の格子Lが、$GL(m;\mathcal{O}_K)$-不変とは、任意の $\gamma\in GL(m;\mathcal{O}_K)$ に対し、$L=L\cdot\gamma$ を満足することを言う。

$\overline{\mathcal{H}_0}=\{W\in M(m;\mathbb C)\mid {}^t\overline{W}=W\geq 0\}$, $\overline{\mathcal{H}_0}$ 上の連続函数の空間を、$C(\overline{\mathcal{H}_0})$ とかく。$\pi: V\longrightarrow\overline{\mathcal{H}_0}$, $\pi^*: V\longrightarrow\overline{\mathcal{H}_0}$ は、$\pi(X)=H[X]$, $\pi^*(X)=H^{-1}[X]$ で定義される。

<u>定義1.</u> $GL(m;\mathcal{O}_K)$-不変な格子 $L(\subset V_{\mathbb Q})$、$f\circ\pi\in\mathcal{S}(V)$, (resp. $f\circ\pi^*\in\mathcal{S}(V)$) となる $f\in C(\overline{\mathcal{H}_0})$ に対し

$$Z_{\mathfrak p}(s;L;f)=\int_{B_{\mathfrak p}/B_{\mathfrak p}(\mathbb Z)}\prod_{i=1}^{k}\chi_{\mathfrak p}^{(i)}(b)^{s_i}\sum_{\xi\in L\cap V-S} f(H[\xi\,{}^tb])\,db$$

(resp.) $$Z^*_{\mathfrak p}(s;L;f)=\int_{B_{\mathfrak p}/B_{\mathfrak p}(\mathbb Z)}\prod_{i=1}^{k}\chi_{\mathfrak p}^{*(i)}(b)^{s_i}\sum_{\xi\in L\cap V-S} f(H^{-1}[\xi\cdot\bar{b}^{-1}])\,db$$

ここで、db は p.7 の如く正規化した $B_{\mathfrak p}$ の right-invariant measure, 又、$\chi_{\mathfrak p}^{(i)}$, $\chi_{\mathfrak p}^{*(i)}$ は $U(H)$ 上 trivial な指標だったから、単に $B_{\mathfrak p}$ の指標とみなした。

<u>定義2.</u> L: $GL(m;\mathcal{O}_K)$-不変な格子、$L\ni\xi,\eta$ について、

$$\xi\sim\eta \iff \xi\,{}^tb=\eta \quad ({}^{\exists}b\in B_{\mathfrak p}(\mathbb Z))$$

$$\xi\overset{*}{\sim}\eta \iff \xi\cdot\bar{b}^{-1}=\eta \quad ({}^{\exists}b\in B_{\mathfrak p}(\mathbb Z))$$

<u>定義3.</u> $GL(n:\mathcal{O}_K)$-不変な格子Lについて

$$\zeta_{\mathbb{P}}(L:s_1,\cdots,s_r)=\sum_{X\in L\cap(V-S)/\sim}\prod_{i=1}^{r}P_{\mathbb{P}}^{(i)}(X)^{-s_i}$$

$$\zeta_{\mathbb{P}}^{*}(L:s_1,\cdots,s_r)=\sum_{Y\in L\cap(V-S)/\overset{*}{\sim}}\prod_{i=1}^{r}Q_{\mathbb{P}}^{(i)}(Y)^{-s_i}$$

まず Maass[6]にならって 格子 $L_0=M(n,m:\mathcal{O}_K)$について $\zeta_{\mathbb{P}}$, $\zeta_{\mathbb{P}}^{*}$ を計算してみよう。

<u>補題6.</u> nの分割 $\tilde{\mathbb{P}}$, $\hat{\mathbb{P}}$ を $\tilde{\mathbb{P}}=(p_1,\cdots,p_r,p_{r+1})$, $\hat{\mathbb{P}}=(p_0,p_1,\cdots,p_r)$ $p_0=p_{r+1}=n-m$ とする。U_Kで$\mathcal{O}_K$の単数群を表わす。$a\in\mathcal{O}_K-\{0\}$に対し、(a)でaの生成するイデアルを表わす。

(i) $L_0\cap(V-S)/\sim$ の完全代表系として、次がとれる。

$$\left\{ U\cdot\begin{pmatrix} a_1 & & a_{ij} \\ & \ddots & \\ 0 & & a_m\end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{array}{l} a_i\in\mathcal{O}_K-\{0\}/U_K,\quad a_{ij}\in\mathcal{O}_K/(a_i) \\ U\in SL(n:\mathcal{O}_K)/{}^{t}B_{\tilde{\mathbb{P}}}\cap SL(n:\mathcal{O}_K)\end{array}\right\}$$

(ii) $L_0\cap(V-S)/\overset{*}{\sim}$ の完全代表系として、次がとれる。

$$\left\{ U\cdot\begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ a_{ij} & & a_m\end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{array}{l} a_i\in\mathcal{O}_K-\{0\}/U_K,\quad a_{ij}\in\mathcal{O}_K/(a_i) \\ U\in SL(n:\mathcal{O}_K)/B_{\hat{\mathbb{P}}}\cap SL(n:\mathcal{O}_K)\end{array}\right\}$$

(:: (i)) Kの類数$=1$と仮定してあるから、単因子論が使える。$V-S$の元は rank$=m$であることに注意すれば、上のTypeの元と同値になることは、易しい。ある、$b\in B_{\mathbb{P}}(\mathbb{Z})$があって、

$$U\cdot\begin{pmatrix} a_1 & a_{ij} \\ 0 & a_m\end{pmatrix}\cdot{}^{t}b=U'\begin{pmatrix} a'_1 & a'_{ij} \\ 0 & a'_m\end{pmatrix} \quad とする。$$

このとき、$U^{-1}U'\in{}^{t}B_{\tilde{\mathbb{P}}}\cap SL(n,\mathcal{O}_K)$ となるから $U=U'$。

$$\therefore \begin{pmatrix} a_1 & & a_{ij} \\ & \ddots & \\ 0 & & a_m \end{pmatrix} \cdot {}^t b = \begin{pmatrix} a'_1 & & a'_{ij} \\ & \ddots & \\ 0 & & a'_m \end{pmatrix} \quad \therefore\ b \in B_{\mathbb{P}_0}(\mathbb{Z}) \quad \mathbb{P}_0 = (\overbrace{1,1,\cdots,1}^{m})$$

したがって

$b = \begin{pmatrix} b_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ b_{ij} & & b_m \end{pmatrix}$ とおくと. $b_i \in U_K$. $a_i \in O_K - \{0\}/U_K$ より,

$a_i = a'_i$. $\therefore b_i = 1$. $a_{ij} \in O_K/(a_i)$ より以下帰納的に $b_{ij} = 0$

$(i \neq j)$ が言える。

(ii) の証明も同様だから、省略する。 //

<u>補題7</u>. 虚二次体Kの Dedekind Zeta を $\zeta_K(s)$ とする。

$L_0 = M(n,m;O_K)$ について,

(i) $$\xi_{\mathbb{P}}(L_0;s_1,\cdots,s_r) = \prod_{i=1}^{r}\prod_{j=0}^{p_i-1}\zeta_K(s_i+\cdots+s_r-k^{*(r-i)}_{\mathbb{P}}-j) \times \sum_{U\in SL(n;O_K)/{}^tB_{\hat{\mathbb{P}}}\cap SL(n;O_K)} \prod_{i=1}^{r} \left|{}^t\bar{U}HU[E^{(i)}_{\mathbb{P}}]\right|^{-s_i}$$

(ii) $$\xi^*_{\mathbb{P}}(L_0;s_1,\cdots,s_r) = \prod_{i=1}^{r}\prod_{j=0}^{p_{r-i+1}-1}\zeta_K(s_i+\cdots+s_r-k^{(r-i)}_{\mathbb{P}}-j) \times \sum_{U\in SL(n;O_K)/B_{\hat{\mathbb{P}}}\cap SL(n;O_K)} \prod_{i=1}^{r} \left|{}^t\bar{U}H^{-1}U[E^{*(i)}_{\mathbb{P}}]\right|^{-s_i}$$

特に. $\xi_{\mathbb{P}}(L_0;s_1,\cdots,s_r)$ (resp. $\xi^*_{\mathbb{P}}(L_0;s_1,\cdots,s_r)$) は $Re(s_i) > p_i + p_{i+1}$

$i=1,\cdots,r$, $p_{r+1} = n-m$ (resp. $Re(s_i) > p_{r-i} + p_{r-i+1}$, $i=1,\cdots,r$, $p_0 = n-m$)

で絶対収束する。

(∵) (i) 補題6より,

$$\xi_{\mathbb{P}}(L_0;s_1,\cdots,s_r) = \sum_{a_i \in O_K-\{0\}/U_K} \ \sum_{a_{ij}\in O_K/(a_i)} \ \sum_{U \in SL(n;O_K)/{}^tB_{\hat{\mathbb{P}}}\cap SL(n;O_K)} \qquad (\#)$$

$$(\#) = \prod_{i=1}^{r} \left| H[U\cdot E_{\mathfrak{p}}^{(r)}]\left[\begin{pmatrix} a_1 & & a_{ij} \\ & \ddots & \\ & & a_m \end{pmatrix}\right][E_{\mathfrak{p}}^{(i)}] \right|^{-s_i}$$

$$= \prod_{i=1}^{r} \chi_{\mathfrak{p}}^{(i)}\left(\begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ a_{ij} & & a_m \end{pmatrix}\right)^{-s_i} \cdot \left| H[U][E_{\mathfrak{p}}^{(i)}] \right|^{-s_i}$$

$$= \prod_{i=1}^{r} \prod_{j=0}^{p_i-1} \left| a_{k_{\mathfrak{p}}^{(i)}-j} \right|^{-2(s_i+\cdots+s_r)} \cdot \prod_{i=1}^{r} \left| H[U][E_{\mathfrak{p}}^{(i)}] \right|^{-s_i}$$

$$\therefore\ \zeta_{\mathfrak{p}}(L_0; s_1, \cdots, s_r) = \sum_{a_i \in \mathcal{O}_K - \{0\}/U_K} \ \sum_{a_{ij} \in \mathcal{O}_K/(a_i)} \ \prod_{i=1}^{r} \prod_{j=0}^{p_i-1} \left| a_{k_{\mathfrak{p}}^{(i)}-j} \right|^{-2(s_i+\cdots+s_r)}$$

$$\times \sum_{U \in SL(n;\mathcal{O}_K)/{}^tB_{\mathfrak{p}} \cap SL(n;\mathcal{O}_K)} \left| {}^t\bar{U} H U [E_{\mathfrak{p}}^{(i)}] \right|^{-s_i}$$

$$= \sum_{a_i \in \mathcal{O}_K - \{0\}/U_K} \ \prod_{i=1}^{r} \prod_{j=0}^{p_i-1} \left| a_{k_{\mathfrak{p}}^{(i)}-j} \right|^{-2(s_i+\cdots+s_r - k_{\mathfrak{p}}^{*(r-i)} - j)}$$

$$\cdot \sum_{U \in SL(n;\mathcal{O}_K)/{}^tB_{\mathfrak{p}} \cap SL(n;\mathcal{O}_K)} \left| {}^t\bar{U} H U [E_{\mathfrak{p}}^{(i)}] \right|^{-s_i}$$

$$= \prod_{i=1}^{r} \prod_{j=0}^{p_i-1} \left\{ \sum_{a \in \mathcal{O}_K - \{0\}/U_K} |a|^{-2(s_i+\cdots+s_r - k_{\mathfrak{p}}^{*(r-i)} - j)} \right\}$$

$$\times \sum_{U \in SL(n;\mathcal{O}_K)/{}^tB_{\mathfrak{p}} \cap SL(n;\mathcal{O}_K)} \left| {}^t\bar{U} H U [E_{\mathfrak{p}}^{(i)}] \right|^{-s_i}$$

Kが類数1の虚二次体だったから、$\zeta_K(s) = \sum_{a \in \mathcal{O}_K - \{0\}/U_K} |a|^{-2s}$ であり、(i)は証明された。

(ii) も全く同様である。

$Re(s_i) > p_i + p_{i+1}$ $(i = 1, \cdots, r)$ のとき.

$$\mathrm{Re}(s_i+\cdots+s_k)-k_{\mathbb{P}}^{*(k-i)}-j \geqq k_{\mathbb{P}}^{*(k-i)}+n-m \geqq 1$$

よって $\zeta_K(s_i+\cdots+s_k-k_{\mathbb{P}}^{*(k-i)}-j)$ は $\mathrm{Re}(s_i)>p_i+p_{i+1}$ $(i=1,\cdots,k)$ で絶対収束。

$$\sum_{u\in SL(n;\mathcal{O}_K)/{}^tB_{\mathbb{P}}\cap SL(n;\mathcal{O}_K)} \prod_{i=1}^{k} |{}^t\bar{u}Hu[E_{\mathbb{P}}^{(i)}]|^{-s_i}$$

は、$SL(n;\mathbb{C})$ の Eisenstein 級数に他ならず、この級数が $\mathrm{Re}(s_i)>p_i+p_{i+1}$ $(i=1,\cdots,k)$ で絶対収束することは、Godement の判定条件の結論である。(cf A. Borel [2])

$\zeta_{\mathbb{P}}^*(L_0;s_1,\cdots,s_k)$ の収束も全く同様である。 //

補題8. $GL(m;\mathcal{O}_K)$-不変な格子 L、$f\circ\pi$ (resp. $f\circ\pi^*$) $\in\mathcal{S}(V)$ なる $f\in C(\overline{H_0})$ に対し、$Z_{\mathbb{P}}(s;L;f)$, $\zeta_{\mathbb{P}}(L;s)$ (resp. $Z^*_{\mathbb{P}}(s;L;f)$, $\zeta^*_{\mathbb{P}}(L;s)$) は、$\mathrm{Re}(s_i)>p_i+p_{i+1}$ $(i=1,\cdots,k)$ (resp. $\mathrm{Re}(s_i)>p_{k-i}+p_{k-i+1}$ $(i=1,\cdots,k)$) で、絶対収束し、

(i) $$Z_{\mathbb{P}}(s;L;f)=\pi^{\frac{1}{2}(p_1^2+\cdots+p_k^2+m^2)-mn}\cdot\frac{\prod_{i=1}^{m}\Gamma(n-m+i)}{\prod_{i=1}^{k}\prod_{j=1}^{p_i}\Gamma(j)}$$
$$\times|H|^{m}\cdot\zeta_{\mathbb{P}}(L;s)\cdot\Phi_{\mathbb{P}}(s;f\circ\pi)$$

(ii) $$Z^*_{\mathbb{P}}(s;L;f)=\pi^{\frac{1}{2}(p_1^2+\cdots+p_k^2+m^2)-mn}\cdot\frac{\prod_{i=1}^{m}\Gamma(n-m+i)}{\prod_{i=1}^{k}\prod_{j=1}^{p_i}\Gamma(j)}$$
$$\times|H|^{-m}\cdot\zeta^*_{\mathbb{P}}(L;s)\cdot\Phi^*_{\mathbb{P}}(s;f\circ\pi^*)$$

(∵) $L\subset V_{\mathbb{Q}}$. したがって、$\alpha\in\mathcal{O}_K$ で、$\alpha L\subset L_0=M(n,m;\mathcal{O}_K)$ となるものが存在する。

$$\therefore \sum_{x\in L\cap V-S/\sim} \prod_{i=1}^{k} |P_{p}^{(i)}(x)|^{-R_e s_i} \leqq \sum_{x\in L_0\cap V-S/\sim} \prod_{i=1}^{k} |P_{p}^{(i)}(\alpha^{-1}x)|^{-R_e s_i}$$

$$= |\alpha|^{-2\sum_{i=1}^{k} k_p^{(i)} R_e s_i} \cdot \xi_p(L_0 : R_e(s_1), \cdots ; R_e(s_k))$$

この右辺は、すでに述べたように、$Re(s_i) > p_i + p_{i+1}$ $(i=1,\cdots,k)$ で絶対収束している。よって $\xi_p(L: s_1,\cdots,s_k)$ は、同じ範囲で絶対収束する。$\xi_p^*(L: s_1,\cdots,s_k)$ についても同様である。

次に、$Z_p(s:L:f)$ を形式的に変形してみる。

$$Z_p(s:L:f) = \int_{B_p/B_p(\mathbb{Z})} \prod_{i=1}^{k} \chi_p^{(i)}(b)^{s_i} \sum_{\xi\in L\cap V-S} f(H[\xi^t b])\, db$$

$$= \sum_{\xi\in L\cap V-S/\sim} \int_{B_p} \prod_{i=1}^{k} \chi_p^{(i)}(b)^{s_i} f(H[\xi^t b])\, db$$

$$= \sum_{\xi\in L\cap V-S/\sim} \prod_{i=1}^{k} |P_p^{(i)}(\xi)|^{-s_i} \cdot \int_{B_p} \prod_{i=1}^{k} P_p^{(i)}(\xi^t b)^{s_i} f(H[\xi^t b])\, db$$

よって、補題2.を利用すれば、

$$\int_{B_p} \prod_{i=1}^{k} P_p^{(i)}(\xi^t b)^{s_i} f(H[\xi^t b])\, db$$

$$= \int_{(B_p)_{H[\xi]}} d\nu_{H[\xi]} \cdot \int_{\mathcal{H}^0} \prod_{i=1}^{k} |w[E_p^{(i)}]|^{s_i} f(w)\, \widetilde{dw}$$

$$= \frac{\pi^{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k} p_i^2 + \frac{m}{2}}}{\prod_{i=1}^{k} \prod_{j=1}^{p_i} \Gamma(j)} \cdot \int_{\mathcal{H}^0} \prod_{i=1}^{k} |w[E_p^{(i)}]|^{s_i} f(w)\, \widetilde{dw}$$

一方、補題1によって、

$$\Phi_P(s; f\circ\pi) = \int_{V-S} \prod_{i=1}^{k} P_P^{(i)}(x)^{s_i-p_i-p_{i+1}} f(H[x])\,dx$$

$$= \int_{\mathcal{X}^\circ} \prod_{i=1}^{k} |W[E_P^{(i)}]|^{s_i-p_i-p_{i+1}} f(w)\,dw \cdot \int_{\pi^{-1}(w)} |\theta_w|$$

$$= |H|^{-m} \cdot \frac{\pi^{\frac{m(2n-m+1)}{2}}}{\prod_{i=1}^{m} \Gamma(n-m+i)} \cdot \int_{\mathcal{X}^\circ} \prod_{i=1}^{k} |W[E_P^{(i)}]|^{s_i} f(w)\,\widetilde{dw}$$

以上より、容易に(i)が得られる。ξ_P, Φ_P の $Re(s_i) > p_i + p_{i+1}$ $(i=1,\cdots k)$ での絶対収束性より、以上の計算は正当化される。(ii)に関しても同様である。 //

さて、我々の定理は次のとおりである。

定理. $\xi_P(L;s)$, $\xi^*_P(L;s)$ は、$\mathbb{C}^k$ 上の有理型函数として解析接続され、次の函数等式を満足する。

(1). L^* を L の双対格子、すなわち、$L^* = \{x \in V_{\mathbb{Q}} \mid \langle x, y\rangle \in \mathbb{Z},\ \forall y \in L\}$。$v(L^*) = \int_{V/L^*} dx$.

$$\tilde{\xi}_P(L; s_1,\cdots,s_k) = |H|^{\frac{m}{2}} \pi^{-\sum_{i=1}^{k} k_P^{(i)} s_i} \times \prod_{i=1}^{k} \prod_{j=0}^{p_i-1} \Gamma(s_i+\cdots+s_k - k_P^{*(k-i)} - j) \cdot \xi_P(L; s_1,\cdots,s_k)$$

$$\tilde{\xi}^*_P(L^*; s_1,\cdots,s_k) = |H|^{-\frac{m}{2}} \pi^{-\sum_{i=1}^{k} k_P^{*(i)} s_i} \times \prod_{i=1}^{k} \prod_{j=0}^{p_{k-i+1}-1} \Gamma(s_i+\cdots+s_k - k_P^{(k-i)} - j) \cdot \xi^*_P(L^*; s_1,\cdots,s_k)$$

とおけば、

$$v(L^*)^{-1}\, \tilde{\xi}_P(L; s_1,\cdots,s_k) = \tilde{\xi}^*_P(L^*; s_{k-1},\cdots,s_1, n-s_1-\cdots-s_k)$$

(2). D を K の判別式、$\eta_K(s)=\left(\frac{\sqrt{|D|}}{2\pi}\right)^s\Gamma(s)\zeta_K(s)$ とおく。
$\xi_{\mathbb{P}}(L;s_1,\cdots,s_\nu)$ (resp. $\xi^*_{\mathbb{P}}(L;s_1,\cdots,s_\nu)$) を変数変換(#) (resp. (b)) によって、$z_1,\cdots,z_\nu$ の函数とみたとき、$\xi_{\mathbb{P}}(L;z_1,\cdots,z_\nu)$ (resp. $\xi^*_{\mathbb{P}}(L;z_1,\cdots,z_\nu)$) と記す。

任意の $\sigma\in\mathfrak{S}_\nu$ に対して、$\xi_{\mathbb{P}}(L;z_1,\cdots,z_\nu)/\xi_{\mathbb{P}^\sigma}(L;z_{\sigma(1)},\cdots,z_{\sigma(\nu)})$ (resp. $\xi^*_{\mathbb{P}}(L;z_1,\cdots,z_\nu)/\xi^*_{\mathbb{P}^\sigma}(L;z_{\sigma(1)},\cdots,z_{\sigma(\nu)})$) は、$\eta_K(z_\nu-z_\mu+\frac{p_\mu+p_\nu}{2}-j)$ ($j=0,1,2,\cdots$) の積で書ける。
特に、巡回置換 $\sigma_0=\begin{pmatrix}1, & 2, & \cdots, & \nu\\ \nu, & 1, & \cdots, & \nu-1\end{pmatrix}$ に対しては、

$$\frac{\xi_{\mathbb{P}^{\sigma_0}}(L;z_{\sigma_0(1)},\cdots,z_{\sigma_0(\nu)})}{\xi_{\mathbb{P}}(L;z_1,\cdots,z_\nu)}=\frac{\xi^*_{\mathbb{P}^{\sigma_0}}(L;z_{\sigma_0(1)},\cdots,z_{\sigma_0(\nu)})}{\xi^*_{\mathbb{P}}(L;z_1,\cdots,z_\nu)}=\prod_{i=1}^{\nu-1}\prod_{j=0}^{p_i-1}\frac{\eta_K(z_\nu-z_i+\frac{p_i+p_\nu}{2}-j)}{\eta_K(z_i-z_\nu+\frac{p_i+p_\nu}{2}-j)}$$

互換 $\sigma_i=(i,i+1)$ ($i=1,\cdots,\nu-1$) に対しては、

$$\frac{\xi_{\mathbb{P}^{\sigma_i}}(L;z_{\sigma_i(1)},\cdots,z_{\sigma_i(\nu)})}{\xi_{\mathbb{P}}(L;z_1,\cdots,z_\nu)}=\frac{\xi^*_{\mathbb{P}^{\sigma_i}}(L;z_{\sigma_i(1)},\cdots,z_{\sigma_i(\nu)})}{\xi^*_{\mathbb{P}}(L;z_1,\cdots,z_\nu)}=\prod_{j=0}^{p_i-1}\frac{\eta_K(z_{i+1}-z_i+\frac{p_i+p_{i+1}}{2}-j)}{\eta_K(z_i-z_{i+1}+\frac{p_i+p_{i+1}}{2}-j)}$$

で与えられる。

<u>Remark</u> $p_1=p_2=\cdots=p_\nu=p$ となる分割 $\mathbb{P}$ については、函数等式(2) は、任意の $\sigma\in\mathfrak{S}_\nu$ について

$$\prod_{1\le\mu<\nu\le\nu}\prod_{j=1}^{p}\eta_K(z_\nu-z_\mu+j)\,\xi_{\mathbb{P}}(L;z_1,\cdots,z_\nu)$$

$$\prod_{1\le\mu<\nu\le\nu}\prod_{j=1}^{p}\eta_K(z_\nu-z_\mu+j)\,\xi^*_{\mathbb{P}}(L;z_1,\cdots,z_\nu)$$

は、$(z_1,\cdots,z_\nu)\longrightarrow(z_{\sigma(1)},\cdots,z_{\sigma(\nu)})$ で不変という形にまとめられる。

§5. 定理の証明

§5-1：函数等式(1)の証明

$\pi: V \to \overline{H_0}$ ($\pi(x)=H[x]$), $\pi^*: V \to \overline{H_0}$ ($\pi^*(x)=H^{-1}[x]$) で、Hを明示しないときには、π_H, π_H^* とかくことにする。

$\varphi \in C(\overline{H_0})$、$g \in GL(n;\mathbb{C})$ に対し、$\pi_{H[g]}(x) = \pi_H(gx)$, $\varphi\circ\pi_{H[g]}(x) = \varphi\circ\pi_H(gx)$ が成立つ。よって、ある n 次正定値エルミート行列 H_0 に対し、$\varphi\circ\pi_{H_0} \in \mathcal{S}(V)$ ならば、任意の n 次正定値エルミート行列 H に対し $\varphi\circ\pi_H \in \mathcal{S}(V)$ が成立つ。特に $\pi_H^* = \pi_{H^{-1}}$ だから $\varphi\circ\pi_H^* \in \mathcal{S}(V)$ でもある。

$S(\overline{H_0}) = \{\varphi \in C(\overline{H_0}) \mid \varphi\circ\pi_H \in \mathcal{S}(V)\}$ とおく。これは、H によらない。

<u>補題9</u>.

(1) 線型写像 $\rho: S(\overline{H_0}) \to S(\overline{H_0})$ ($\varphi \mapsto \varphi^\rho$) が存在し、

$$\widehat{\varphi\circ\pi_H^*} = |H|^{m}\cdot\varphi^\rho\circ\pi_H \quad (\varphi \in S(\overline{H_0}))\ 。$$

(2) $0 \neq \varphi \in S(\overline{H_0})$ で次の条件 a), b) を満足するものが存在する。

a) $\varphi(\bar{u} w\, {}^t u) = \varphi(w) \quad (u \in U(E_m),\ w \in \overline{H_0})$

b) 任意の n 次正定値エルミート行列 H に対し、

$$\varphi\circ\pi_H^* \big|_S = 0, \quad \widehat{\varphi\circ\pi_H^*}\big|_{S} = 0$$

(∵)(1) $\varphi \in S(\overline{H_0})$ に対し、Fourier 変換の定義より、$\widehat{\varphi\circ\pi_{E_m}^*}$ は、$U(E_n)$-不変。よって $\varphi^\rho\circ\pi_{E_m} = \widehat{\varphi\circ\pi_{E_m}^*}$ となる $\varphi^\rho \in S(\overline{H_0})$ が

まる。$\psi \mapsto \psi^g$ が条件を満足する。

$=g$ ($g \in GL(n;\mathbb{C})$) とおく。

$\pi_H^*(x) = \psi \circ \pi_{E_n}^* ({}^t\bar{g}^{-1}x)$

$\widehat{\pi_H^*}(x) = |H|^m \cdot \psi^g \circ \pi_H(x) = |H|^m \cdot \psi^g \circ \pi_{E_n}(gx)$

$= E_n$ のときに条件 b) が満たされればよい。

上の定数係数偏微分作用素 $D(x)$ を $D(x)\, e^{2\pi i\langle x, y\rangle}$

$e^{2\pi i\langle x, y\rangle}$ を満たすようにとる。$D(x)$ は、$k \in U(E_n)$

$(kx) = D(x)$ を満たすことに注意する。

) について、

$) = D(x) \cdot |{}^t\bar{x} \cdot x|^{2m+1} \cdot \int_{U(E_m)} \psi \circ \pi_{E_m}(x\,{}^t u)\, du$

(du は、$U(E_m)$ の Haar measure)

$(kx\,{}^t u) = \varphi_\psi(x)$ ($k \in U(E_n)$, $u \in U(E_m)$) が成立つ。

$p = \psi_0 \circ \pi_{E_n}$ となる $\psi_0 \in S(\Omega_0)$ が存在するが、ψ_0 は、条件

a) は明らかである。$D(x)$ は、$2m$ 階の定係数偏微分作

$\varphi_\psi |_S = 0$。又、部分積分によって、

$$= \int_V D(x) \Big\{ |{}^t\bar{x}x|^{2m+1} \int_{U(E_m)} \psi \circ \pi_{E_m}(x\,{}^t u)\, du \Big\} e^{2\pi i\langle x, y\rangle} dx$$

$$= |{}^t\bar{y}y| \cdot \int_V |{}^t\bar{x}x|^{2m+1} \cdot \int_{U(E_m)} \psi \circ \pi_{E_n}(x\,{}^t u)\, du \cdot e^{2\pi i\langle x, y\rangle} dx。$$

$= 0$。 //

補題9を利用して、函数等式(1)の証明をしよう。

$\Phi \in \mathcal{S}(V)$ に、Poisson の和公式を適用すれば、

$$v(L^*)^{-1} \sum_{x \in L} \hat{\Phi}({}^t x b) = \|b\|^{-2n} \sum_{y \in L^*} \Phi(y b^{-1})$$

が成立つ。特に、補題9の(2)によって、

$$f \circ \pi^* \Big|_S = 0 \ , \ \widehat{f \circ \pi^*} \Big|_S = |H|^m \cdot f^\varrho \circ \pi \Big|_S = 0$$

となる $f \in \mathcal{S}(\overline{H_0})$ をとれば、

$$v(L^*)^{-1} \sum_{x \in L \cap V - S} \widehat{f \circ \pi^*}({}^t x b) = \|b\|^{-2n} \sum_{y \in L^* \cap V - S} f \circ \pi^*(y b^{-1})$$

をうる。

$$Z_P^+(s : L : |H|^m f^\varrho) = \int_{\substack{B_P/B_P(\mathbb{Z}) \\ \chi_P^{(k)}(b) \geq 1}} \prod_{i=1}^{k} \chi_P^{(i)}(b)^{s_i} \sum_{x \in L \cap V - S} \widehat{f \circ \pi^*}({}^t x b)\, db.$$

$$Z_P^-(s : L : |H|^m f^\varrho) = \int_{\substack{B_P/B_P(\mathbb{Z}) \\ \chi_P^{(k)}(b) \leq 1}} \prod_{i=1}^{k} \chi_P^{(i)}(b)^{s_i} \sum_{x \in L \cap V - S} \widehat{f \circ \pi^*}({}^t x b)\, db$$

$$Z_P^{*+}(s : L^* : f) = \int_{\substack{B_P/B_P(\mathbb{Z}) \\ \chi_P^{*(k)}(b) \geq 1}} \prod_{i=1}^{k} \chi_P^{*(i)}(b)^{s_i} \sum_{y \in L^* \cap V - S} f \circ \pi^*(y b^{-1})\, db$$

$$Z_P^{*-}(s : L^* : f) = \int_{\substack{B_P/B_P(\mathbb{Z}) \\ \chi_P^{*(k)}(b) \leq 1}} \prod_{i=1}^{k} \chi_P^{*(i)}(b)^{s_i} \sum_{y \in L^* \cap V - S} f \circ \pi^*(y b^{-1})\, db$$

とおくと、補題8により、Z_P^+ は、$\{s \in \mathbb{C}^k \mid Re(s_i) > p_i + p_{i+1} \ \ i = 1, \cdots, k-1\}$ Z_P^- は $\{s \in \mathbb{C}^k \mid Re(s_i) > p_i + p_{i+1} \ , \ i = 1, \cdots, k\}$、$Z_P^{*+}$ は、$\{s \in \mathbb{C}^k \mid Re(s_i) > p_{k-i} + p_{k-i+1} \ , \ i = 1, \cdots, k-1\}$、$Z_P^{*-}$ は $\{s \in \mathbb{C}^k \mid Re(s_i) > p_{k-i} + p_{k-i+1} \ \ i = 1, \cdots, k\}$

で、絶対収束する。

$$Z_{\mathbb{P}}(S:L:|H|^m f^g) = Z_{\mathbb{P}}^{+}(S:L:|H|^m f^g) + Z_{\mathbb{P}}^{-}(S:L:|H|^m f^g)$$

一方、Poissonの和公式によって、

$$Z_{\mathbb{P}}^{-}(S:L:|H|^m f^g) = \int_{\substack{B_{\mathbb{P}}/B_{\mathbb{P}}(\mathbb{Z}) \\ \chi_{\mathbb{P}}^{(r)}(b)\leq 1}} \prod_{i=1}^{r} \chi_{\mathbb{P}}^{(i)}(b)^{s_i} \sum_{X\in L\cap V-S} \widehat{f\circ\pi^*}(X^t b)\, db$$

$$= v(L^*) \int_{\substack{B_{\mathbb{P}}/B_{\mathbb{P}}(\mathbb{Z}) \\ \chi_{\mathbb{P}}^{(r)}(b)\leq 1}} \prod_{i=1}^{r-1} \chi_{\mathbb{P}}^{(i)}(b)^{s_i} \cdot \chi_{\mathbb{P}}^{(r)}(b)^{s_r-n} \sum_{Y\in L^*\cap V-S} f\circ\pi^*(Y b^{-1})\, db$$

$$= v(L^*) \int_{\substack{B_{\mathbb{P}}/B_{\mathbb{P}}(\mathbb{Z}) \\ \chi_{\mathbb{P}}^{*(r)}(b)\geq 1}} \prod_{i=1}^{r-1} \chi_{\mathbb{P}}^{*(i)}(b)^{s_{r-i}} \cdot \chi_{\mathbb{P}}^{*(r)}(b)^{n-s_1-\cdots-s_r} \sum_{Y\in L^*\cap V-S} f\circ\pi^*(Y b^{-1})\, db$$

$$= v(L^*)\, Z_{\mathbb{P}}^{*+}(s_{r-1},\cdots,s_1,n-s_1-\cdots-s_r : L^* : f) \text{。}$$

$$\therefore\ Z_{\mathbb{P}}(S:L:|H|^m f^g)$$
$$= Z_{\mathbb{P}}^{+}(S:L:|H|^m f^g) + v(L^*)\, Z_{\mathbb{P}}^{*+}(s_{r-1},\cdots,s_1,n-s_1-\cdots-s_r : L^* : f) \text{。}$$

この表示は、$Z_{\mathbb{P}}(S:L:|H|^m f^g)$が、$\{S\in\mathbb{C}^r \mid \mathrm{Re}(s_i) > p_i + p_{i+1}\quad i=1,\cdots,r-1\}$上の正則函数として延長されることを示している。

同様にして、

$$Z_{\mathbb{P}}^{*}(s_{r-1},\cdots,s_1,n-s_1-\cdots-s_r : L^* : f)$$
$$= Z_{\mathbb{P}}^{*+}(s_{r-1},\cdots,s_1,n-s_1-\cdots-s_r : L^* : f) + v(L^*)^{-1} Z_{\mathbb{P}}^{+}(S:L:|H|^m f^g)$$

が得られる。

従って $\{s\in\mathbb{C}^{\nu} \mid Re(s_i)>p_i+p_{i+1}\ \ i=1,\dots,\nu-1\}$ で

$$v(L^*)^{-1} Z_p(s_1,\dots,s_\nu : L : |H|^{m} f^{g}) = Z_p^*(s_{\nu-1},\dots,s_1, n-s_1-\dots-s_\nu : L^* : f)。$$

補題8の(i), (ii)と、命題1とをあわせれば、容易に函数等式(1)を得る。 //

<u>Rem</u>. ここでは、$\xi_p(L:s)$ (resp. $\xi_p^*(L^*:s)$) は、$Re(s_i)>p_i+p_{i+1}$ $i=1,\dots,\nu-1$, (resp. $Re(s_i)>p_{\nu-i}+p_{\nu-i+1}$ $i=1,\dots,\nu-1$) の範囲に有理型函数として解析接続された。$\mathbb{C}^{\nu}$全体への解析接続は、函数等式(2)を必要とする。

§5-2：この節では、函数等式(2)の証明に必要な補題をまとめておく。

<u>補題10</u>. n の分割 $q=(q_1,\dots,q_{\nu+1})$ $(\nu\geq 1)$、n 次正定値エルミート行列 H に対し、

$$E_q(H:s_1,\dots,s_\nu)=\sum_{U\in SL(n:O_k)/{}^tB_q\cap SL(n:O_k)} \prod_{i=1}^{\nu} |{}^t\bar{U}HU[E_q^{(i)}]|^{-s_i}$$

$$E_q^*(H:s_1,\dots,s_\nu)=\sum_{U\in SL(n:O_k)/B_q\cap SL(n:O_k)} \prod_{i=1}^{\nu} |{}^t\bar{U}H^{-1}U[E_q^{*(i)}]|^{-s_i}$$

とする。E_q (resp. E_q^*) は、$Re(s_i)>q_i+q_{i+1}$, $1\leq i\leq\nu$ (resp. $Re(s_i)>q_{\nu-i+1}+q_{\nu-i+2}$, $1\leq i\leq\nu$) で絶対収束して、

$$E_q(H:s_1,\dots,s_\nu)=|H|^{-s_1-\dots-s_\nu}E_q^*(H:s_\nu,\dots,s_1)$$

$\cdots H U[E_q^{(i)}]| = |H|\cdot|{}^t U^{-1} H^{-1} {}^t U^{-1}[E_q^{*(k-i+1)}]|$

$(H : s_1, \cdots, s_k) = |H|^{-s_1-\cdots-s_k} \left\{ \sum_{U \in SL(n:O_K)/{}^tB_q \cap SL(n:O_K)} \prod_{i=1}^{k} |{}^tU^{-1} H^{-1} {}^tU^{-1}[E_q^{*(k-i+1)}]|^{-s_i} \right\}$

$(n:O_K)/{}^tB_q\cap SL(n:O_K)$ の完全代表系を動くとき, ${}^tU^{-1}$ は,

$B_q\cap SL(n:O_K)$ の完全代表系を動くことにより,

$(H : s_1, \cdots s_k) = |H|^{-s_1-\cdots-s_k} E_q^*(H : s_k, \cdots, s_1)$ 。

4 ですでに注意したように Godement の判定条件による。//

命題2 の証明で利用した記号を再び使う。すなわち,

$) = \mathbb{R}^\times \cdot A \cdot N = \left\{ t\cdot \begin{pmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ n_{ij} & & 1 \end{pmatrix} \right\}$

$\frac{dt}{t}$, $da = \prod_{i=1}^{m-1} \frac{da_i}{a_i}$, $dn = \prod_{i>j} dRe\, n_{ij}\, dIm\, n_{ij}$ 。

$) = U(E_m) \cap B_p = \left\{ \begin{pmatrix} A_1 & & \\ & \ddots & \\ & & A_k \end{pmatrix} \middle| A_i \in U(E_{p_i}) \right\} \cong \prod_{i=1}^{k} U(E_{p_i})$

のとき. $B_p = U_p(E_m)\cdot B^+(m)$ と分解される。$B_p \ni b$ の対

を. $b = u\cdot b^+$ $(u \in U_p(E_m),\ b^+ \in B^+(m))$ とする。

の right invariant measure db^+, $U_p(E_m)$ 上の Haar

du を, それぞれ,

$db^+ = \prod_{i=1}^{m} a_i^{4i} d^\times t\, da\, dn$

$$\int_{U_p(E_m)} du = 2^m \cdot \prod_{i=1}^{k} \left(\frac{\pi^{\frac{p_i(p_i+1)}{2}}}{\prod_{j=1}^{p_i} \Gamma(j)} \right)$$

る。このとき,

$db = du\, db^+$

は、p.7で与えた $B_{\mathbb{P}}$ の right invariant measure である。

特に、$\nu=1$, $\mathbb{P}=(m)$ のとき、

$$GL(m:\mathbb{C}) = U(E_m)\cdot B^+(m)$$

$$dg = \frac{\prod_{i,j} d\mathrm{Re}\, g_{ij}\, d\mathrm{Im}\, g_{ij}}{\| g\|^{2m}} = du\, db \qquad (g=(g_{ij})\in GL(m:\mathbb{C}))$$

$$\int_{U(E_m)} du = 2^m \frac{\pi^{\frac{m(m+1)}{2}}}{\prod_{i=1}^m \Gamma(i)}$$

。

<u>補題11</u>. $f\in S(\overline{H_0})$ が、$f({}^t\bar{u} w u) = f(w)$ $(u\in U(E_m), w\in\overline{H_0})$ を満足するとしよう。このとき、$GL(m:O_K)$-不変な格子 $L(C V_{\mathbb{Q}})$ に対し、

(i) $\mathrm{Re}(s_i) > p_i + p_{i+1}$ $(i=1,\cdots,\nu,\ p_{\nu+1}=n-m)$ で、

$$Z_{\mathbb{P}}(s:L:f) = \pi^{\frac{p_1^2+\cdots+p_\nu^2-m^2}{2}}\cdot\frac{\prod_{i=1}^m\Gamma(i)}{\prod_{i=1}^{\nu}\prod_{j=1}^{p_i}\Gamma(j)}$$

$$\times\int_{GL(m:\mathbb{C})/GL(m:O_K)} \|g\|^{2s_\nu}\cdot E_{\mathbb{P}}(({}^t\bar{g}g)^{-1}:s_1,\cdots,s_{\nu-1})\sum_{\xi\in L\cap V_S'} f(H[\xi\, {}^t g])\, dg.$$

(ii) $\mathrm{Re}(s_i) > p_{\nu-i}+p_{\nu-i+1}$ $(i=1,\cdots,\nu,\ p_0=n-m)$ で、

$$Z_{\mathbb{P}}^*(s:L:f) = \pi^{\frac{p_1^2+\cdots+p_\nu^2-m^2}{2}}\cdot\frac{\prod_{i=1}^m\Gamma(i)}{\prod_{i=1}^{\nu}\prod_{j=1}^{p_i}\Gamma(j)}$$

$$\times\int_{GL(m:\mathbb{C})/GL(m:O_K)} \|g\|^{-2s_\nu} E_{\mathbb{P}}^*(({}^t\bar{g}g)^{-1}:s_1,\cdots,s_{\nu-1})\sum_{\eta\in L\cap V_S'} f(H^{-1}[\eta\,\bar{g}^{-1}])\, dg$$

(ii) (i). 補題8より、$Re(s_i) > p_i + p_{i+1}$ $(i=1,\dots,k)$ で $Z_p(s:L:f)$ は絶対収束して、以下の変形が許される。

$$Z_p(s:L:f) = \int_{B_p/B_p(Z)} \prod_{i=1}^{k} \chi_p^{(i)}(b)^{s_i} \sum_{\xi \in L\cap V-S} f(H[\xi\,{}^t b])\,db$$

$$= \int_{B_p} \prod_{i=1}^{k} \chi_p^{(i)}(b)^{s_i} \sum_{\xi \in L\cap V-S/\sim} f(H[\xi\,{}^t b])\,db$$

f の $U(E_m)$-不変性によって

$$= 2^m \prod_{i=1}^{k} \left(\frac{\pi^{\frac{p_i(p_i+1)}{2}}}{\prod_{j=1}^{p_i} \Gamma(j)} \right) \cdot \int_{B^+(m)} \prod_{i=1}^{k} \chi_p^{(i)}(b^+)^{s_i} \sum_{\xi \in L\cap V-S/\sim} f(H[\xi\,{}^t b^+])\,db^+$$

$$= \pi^{\frac{p_1^2+\cdots+p_k^2-m^2}{2}} \cdot \frac{\prod_{i=1}^{m} \Gamma(i)}{\prod_{i=1}^{k} \prod_{j=1}^{p_i} \Gamma(j)}$$

$$\times \int_{GL(m;\mathbb{C})} \|g\|^{2s_k} \prod_{i=1}^{k-1} |({}^t\bar{g} g)^{-1} [E_p^{(i)}]|^{-s_i} \sum_{\xi \in L\cap V-S/\sim} f(H[\xi\,{}^t g])\,\cancel{db}\,dg.$$

$$= c_p \int_{GL(m;\mathbb{C})/GL(m;O_K)} \|g\|^{2s_k} \sum_{U \in GL(m;O_K)/B_p(Z)} \prod_{i=1}^{k-1} |({}^t\bar{g} g)^{-1} [{}^t\bar{U}^{-1}] [E_p^{(i)}]|^{-s_i}$$

$$\times \sum_{\xi \in L\cap V-S} f(H[\xi\,{}^t U\,{}^t g])\,dg.$$

$L\cap V-S$ が $GL(m;O_K)$-不変となることに注意すれば、

$$= c_p \int_{GL(m;\mathbb{C})/GL(m;O_K)} \|g\|^{2s_k} E_p(({}^t\bar{g} g)^{-1}; s_1,\dots,s_{k-1}) \sum_{\xi \in L\cap V-S} f(H[\xi\,{}^t g])\,dg$$

ここで、簡単に、$\pi^{\frac{1}{2}(p_1^2+\cdots+p_k^2-m^2)}\cdot\prod_{i=1}^{m}\Gamma(i)\cdot\left(\prod_{i=1}^{\nu}\prod_{j=1}^{p_i}\Gamma(j)\right)^{-1}$ を $C_{\mathbb{P}}$ と書いた。(ii) も全く同じ議論で証明できる。 //

<u>Remark</u>. $Z_{\mathbb{P}}^{+}(s:L:f)$, $Z_{\mathbb{P}}^{*+}(s:L:f)$ を p-28 と同様に定義すれば、

$Re(s_i) > p_i + p_{i+1}$ $(i=1,\cdots,k-1)$ で、

$$Z_{\mathbb{P}}^{+}(s:L:f) = C_{\mathbb{P}}\cdot\int_{\substack{GL(m:\mathbb{C})/GL(m:\mathcal{O}_K)\\ \|g\|\geq 1}} \|g\|^{2s_k} E_{\mathbb{P}}(({}^t\bar{g}g)^{-1}:s_1,\cdots,s_{k-1})\sum_{\xi\in L\cap V-S} f(H[\xi\,{}^t\bar{g}])\,dg$$

$Re(s_i) > p_{k-i} + p_{k-i+1}$ $(i=1,\cdots,k-1)$ で

$$Z_{\mathbb{P}}^{*+}(s:L:f) = C_{\mathbb{P}}\cdot\int_{\substack{GL(m:\mathbb{C})/GL(m:\mathcal{O}_K)\\ \|g\|\leq 1}} \|g\|^{-2s_k} E_{\mathbb{P}}^{*}(({}^t\bar{g}g)^{-1}:s_1,\cdots,s_{k-1})\sum_{\eta\in L\cap V-S} f(H^{-1}[\eta\,\bar{g}^{-1}])\,dg$$

が、補題11と同じ仮定の下で成立する。

§5-1 で示したように、$\psi\in\mathcal{S}(\overline{\mathbb{H}_0})$ が、$\psi\circ\pi|_{S}=0$, $\widehat{\psi\circ\pi}|_{S}=0$ を満たすならば、$Z_{\mathbb{P}}(s:L:\psi)$ は $\{(s_1,\cdots,s_{k-1})\in\mathbb{C}^{k} \mid Re(s_i)>p_i+p_{i+1}\ (i=1,\cdots,k-1)\}$ 上の正則函数とみなせ、次の不等式が成立つ。すなわち、

<u>補題12</u>. $\psi\in\mathcal{S}(\overline{\mathbb{H}_0})$ が、$\psi\circ\pi^{*}|_{S}=0$, $\widehat{\psi\circ\pi^{*}}|_{S}=0$ を満足すれば、領域 $D_M=\{(s_1,\cdots,s_k)\in\mathbb{C}^{k} \mid Re(s_i)>p_i+p_{i+1}\ (i=1,\cdots,k-1),\ |Re(s_k)|<M\}$ $(M>0)$ 上で

$$|Z_{\mathbb{P}}(s:L:\psi^{g})| \leqq Z_{\mathbb{P}}(Re(s_1),\cdots,Re(s_{k-1}),M:L:\psi_1)$$
$$+\,\nu(L^{*})\,Z_{\mathbb{P}}^{*}(Re(s_k),\cdots,Re(s_1),n+M-Re(s_1)-\cdots-Re(s_{k-1}):L^{*}:\psi_2)$$

を満たす $\psi_1,\psi_2\in\mathcal{S}(\overline{\mathbb{H}_0})$ が存在する。

(∵) $$Z_{\mathbb{P}}(s:L:\Psi^{g}) = \int_{\substack{B_{\mathbb{P}}/B_{\mathbb{P}}(\mathbb{Z}) \\ \chi_{\mathbb{P}}^{(k)}(b)\geq 1}} \prod_{i=1}^{k} \chi_{\mathbb{P}}^{(i)}(b)^{s_i} \sum_{x\in L\cap V-S} \widehat{\Psi\circ\pi^*}(x^t b)\,db$$

$$+ \int_{\substack{B_{\mathbb{P}}/B_{\mathbb{P}}(\mathbb{Z}) \\ \chi_{\mathbb{P}}^{(k)}(b)\leq 1}} \prod_{i=1}^{k} \chi_{\mathbb{P}}^{(i)}(b)^{s_i} \cdot \chi_{\mathbb{P}}^{(k)}(b)^{-n} \cdot v(L^*) \sum_{y\in L^*\cap V-S} \Psi\circ\pi^*(y b^{-1})\,db$$

$$\therefore\ |Z_{\mathbb{P}}(s:L:\Psi^{g})| \leqq \int_{\substack{B_{\mathbb{P}}/B_{\mathbb{P}}(\mathbb{Z}) \\ \chi_{\mathbb{P}}^{(k)}(b)\geq 1}} \prod_{i=1}^{k} \chi_{\mathbb{P}}^{(i)}(b)^{Re(s_i)} \sum_{x\in L\cap V-S} |\widehat{\Psi\circ\pi^*}(x^t b)|\,db$$

$$+ v(L^*) \int_{\substack{B_{\mathbb{P}}/B_{\mathbb{P}}(\mathbb{Z}) \\ \chi_{\mathbb{P}}^{(k)}(b)\leq 1}} \prod_{i=1}^{k} \chi_{\mathbb{P}}^{(i)}(b)^{Re(s_i)} \cdot \chi_{\mathbb{P}}^{(k)}(b)^{-n} \sum_{y\in L^*\cap V-S} |\Psi\circ\pi^*(y b^{-1})|\,db$$

∴ D_M 上では.

$$|Z_{\mathbb{P}}(s:L:\Psi^{g})| \leqq \int_{\substack{B_{\mathbb{P}}/B_{\mathbb{P}}(\mathbb{Z}) \\ \chi_{\mathbb{P}}^{(k)}(b)\geq 1}} \prod_{i=1}^{k-1} \chi_{\mathbb{P}}^{(i)}(b)^{Re(s_i)} \cdot \chi_{\mathbb{P}}^{(k)}(b)^{M} \sum_{x\in L\cap V-S} |\widehat{\Psi\circ\pi^*}(x^t b)|\,db$$

$$+ v(L^*) \int_{\substack{B_{\mathbb{P}}/B_{\mathbb{P}}(\mathbb{Z}) \\ \chi_{\mathbb{P}}^{(k)}(b)\leq 1}} \prod_{i=1}^{k-1} \chi_{\mathbb{P}}^{*(i)}(b)^{Re(s_{k-i})} \cdot \chi_{\mathbb{P}}^{*(k)}(b)^{n+M-Re(s_1)-\cdots-Re(s_{k-1})} \cdot \sum_{y\in L^*\cap V-S} |\Psi\circ\pi^*(y b^{-1})|\,db$$

$$\leqq \int_{B_{\mathbb{P}}/B_{\mathbb{P}}(\mathbb{Z})} \prod_{i=1}^{k-1} \chi_{\mathbb{P}}^{(i)}{}^{Re(s_i)} \cdot \chi_{\mathbb{P}}^{(k)}(b)^{M} \sum_{x\in L\cap V-S} |\widehat{\Psi\circ\pi^*}(x^t b)|\,db$$

$$+ v(L^*) \int_{B_{\mathbb{P}}/B_{\mathbb{P}}(\mathbb{Z})} \prod_{i=1}^{k-1} \chi_{\mathbb{P}}^{*(i)}(b)^{Re(s_{k-i})} \cdot \chi_{\mathbb{P}}^{*(k)}(b)^{n+M-Re(s_1)-\cdots-Re(s_{k-1})} \cdot \sum_{y\in L^*\cap V-S} |\Psi\circ\pi^*(y b^{-1})|\,db.$$

ここで、Ψ_1、$\Psi_2 \in \mathcal{S}(H_0)$ を $\Psi_1\circ\pi(x) \geq |\widehat{\Psi\circ\pi^*}(x)|$、$\Psi_2\circ\pi^*(x) \geq |\Psi\circ\pi^*(x)|$ ($\forall x\in V$) なるようにとれる (Weil [12] lemma 5.)。よって、補題は成立つ。

//

§5-3 : 函数等式(2)の証明.

§5-3-1 巡回置換に対する不変性

$f \in \mathcal{S}(\overline{\mathcal{H}_0})$ を補題9の(2)の条件 a), b) を満足するようにとる。この時, 補題11によって,

$$Z_{\mathbb{P}}(S; L; |H|^m f^{\rho}) = c_{\mathbb{P}} \cdot \int_{GL(m;\mathbb{C})/GL(m;\mathcal{O}_K)} \|g\|^{2s_\nu} E_{\mathbb{P}}(({}^t\bar{g}g)^{-1}; s_1, \cdots, s_{\nu-1}) \sum_{\xi \in L \cap V - S} |H|^m f^{\rho}(H[\xi^t g])\, dg$$

が, $\mathrm{Re}(s_i) > p_i + p_{i+1}$ $(i = 1, \cdots, \nu,\ p_{\nu+1} = n - m)$ で成立つ。

又, Poissonの和公式の結論として,

$$(*)_1 \quad v(L^*)^{-1} \sum_{\xi \in L \cap V - S} |H|^m f^{\rho}(H[\xi^t g]) = \|g\|^{-2n} \sum_{\xi \in L^* \cap V - S} f(H^{-1}[\xi \bar{g}^{-1}])$$

$$(g \in GL(m; \mathbb{C}))$$

が得られる。

さて, $E_{\mathbb{P}}(({}^t\bar{g}g)^{-1}; s_1, \cdots, s_{\nu-1})$ は, 補題7,8によって, いま考えているTypeの概均質ベクトル空間のZeta函数の主要な因子として得られる。詳しく言えば, 次のようになる。

$\mathbb{P}_1 = (p_1, \cdots, p_{\nu-1})$ は, $k_{\mathbb{P}}^{(\nu-1)}$ の rank $\nu-1$ の分割。$G_{\mathbb{P}_1}^{(g)} = U(({}^t\bar{g}g)^{-1}) \times B_{\mathbb{P}_1}$ $(g \in GL(m; \mathbb{C}))$, $V_1 = M(m, k_{\mathbb{P}}^{(\nu-1)}; \mathbb{C})$, $S_1 = \{x \in V_1 \mid \mathrm{rank}\, x \lneq k_{\mathbb{P}}^{(\nu-1)}\}$, $L_1 = M(m; k_{\mathbb{P}}^{(\nu-1)}; \mathcal{O}_K)$ とおく。

$\overline{\mathcal{H}_1} = \{w \in M(k_{\mathbb{P}}^{(\nu-1)}; \mathbb{C}) \mid {}^t\bar{w} = w \geq 0\}$, $\mathcal{H}_1 = \{w \in \overline{\mathcal{H}_1} \mid w \gneq 0\}$ とおく。$\widetilde{dw}$, $\widetilde{dw^*}$ は, 分割 $\mathbb{P}_1$ に対して, p.7,8 と同様に定義された $\mathcal{H}_1$ 上の $G_{\mathbb{P}_1}^{(g)}$-相対不変測度。$\pi_g : V_1 \to \overline{\mathcal{H}_1}$, $\pi_g^* : V_1 \to \overline{\mathcal{H}_1}$ は

$\pi_g(x) = ({}^t\bar{g}g)^{-1}[x]$, $\pi_g^*(x) = ({}^t\bar{g}g)[x]$ $(x \in V_1)$ $(g \in GL(m;\mathbb{C}))$ で定める。

任意の $g \in GL(m;\mathbb{C})$ に対し、$\psi \circ \pi_g^*\big|_{S} = 0$、$\widehat{\psi \circ \pi_g^*}\big|_{S'} = 0$ となる $\psi \in \mathcal{S}(H_1)$, $\psi \neq 0$ を一つとる。補題9によってこのような ψ は存在している。

$$\mathcal{E}_{\mathbb{P}_1} = \pi^{\frac{1}{2}(p_1^2 + \cdots + p_{r-1}^2 + k_{\mathbb{P}}^{(r-1)})} \cdot \left(\prod_{i=1}^{r-1}\prod_{j=1}^{p_i}\Gamma(j)\right)^{-1}, \quad \sigma_0 = \begin{pmatrix} 1, & 2, & \cdots, & r \\ r, & 1, & \cdots, & r-1 \end{pmatrix}$$

とおく。このとき、補題7, 8, 及び、補題1、より、

$(*)_2$ $Z_{\mathbb{P}_1}^{(g)}(s_1, \cdots, s_{r-1}; L_1; \|g\|^{-2k_{\mathbb{P}}^{(r-1)}} \cdot \psi^g)$

$$= \int_{B_{\mathbb{P}_1}/B_{\mathbb{P}_1}(\mathbb{Z})} \prod_{i=1}^{r-1} \chi_{\mathbb{P}_1}^{(i)}(b_1)^{s_i} \sum_{x \in L_1 \cap V_1^{S_1}} \|g\|^{2k_{\mathbb{P}}^{(r-1)}} \psi^g \circ \pi_g(x^t b_1)\, db_1$$

$$= \mathcal{E}_{\mathbb{P}_1} \cdot \|g\|^{-2k_{\mathbb{P}}^{(r-1)}} \prod_{i=1}^{r-1}\prod_{j=0}^{p_i-1} \zeta_K(s_i + \cdots + s_{r-1} - k_{\mathbb{P}_1}^{*(r-i-1)} - j)$$

$$\cdot \int_{H_1} \psi^g(w) \prod_{i=1}^{r-1} |w[E_{\mathbb{P}_1}^{(i)}]|^{s_i}\, \widehat{dw} \cdot E_{\mathbb{P}}({}^t\bar{g}g)^{-1}; s_1, \cdots, s_{r-1})$$

$(*)_3$ $Z_{\mathbb{P}_1}^{*(g)}(s_1, \cdots, s_{r-1}; L_1^*; \psi)$

$$= \int_{B_{\mathbb{P}_1}/B_{\mathbb{P}_1}(\mathbb{Z})} \prod_{i=1}^{r-1} \chi_{\mathbb{P}_1}^{*(i)}(b_1)^{s_i} \sum_{y \in L_1^* \cap V_1^{S_1}} \psi \circ \pi_g^*(y\, {}^t b_1^{-1})\, db_1$$

$$= \mathcal{E}_{\mathbb{P}_1} \cdot \left(\frac{|D|}{4}\right)^{\sum_{i=1}^{r-1} k_{\mathbb{P}_1}^{*(i)} s_i} \prod_{i=1}^{r-1}\prod_{j=0}^{p_{r-i}-1} \zeta_K(s_i + \cdots + s_{r-1} - k_{\mathbb{P}_1}^{(r-i-1)} - j)$$

$$\cdot \int_{H_1} \psi(w) \prod_{i=1}^{r-1} |w[E_{\mathbb{P}_1}^{*(i)}]|^{s_i}\, \widetilde{dw}^* \cdot E_{\mathbb{P}^{\sigma_0}}^*(({}^t\bar{g}g)^{-1}; s_1, \cdots, s_{r-1})\text{。}$$

ただし、Dは虚二次体Kの判別式である。$(*)_3$を導く際には、
$L_1^* = M(m, k_{\mathfrak{P}}^{(\nu-1)}; 2\mathfrak{D}^{-1})$ （$\mathfrak{D}$ はKの共役差積）を利用することに注意しておく。

§5-1の結果によって、$(*)_2$、$(*)_3$に現れる函数は、すべて
$\{(s_1,\dots,s_{\nu-1})\in\mathbb{C}^{\nu-1} \mid \mathrm{Re}(s_i) > p_i + p_{i+1}\ (i=1,\dots,\nu-2)\}$ 上の有理型函数と考える。

補題13　$d_i > p_i+p_{i+1}$ $(i=1,\dots,\nu-2)$, $M > \max\{p_{\nu-1}+p_\nu,\ d_1+\cdots+d_{\nu-2}+p_1+p_\nu-m\}$ なる正数 $d_1,\dots,d_{\nu-2}$, M をとり、

$$\Omega = \left\{(s_1,\dots,s_\nu)\in\mathbb{C}^\nu \;\middle|\; \begin{array}{l} d_i > \mathrm{Re}(s_i) > p_i+p_{i+1}\quad (i=1,\dots,\nu-2) \\ M > \mathrm{Re}(s_{\nu-1}) > -M \end{array}\right\}$$

とおく。積分

$$\tilde{Z}_{\mathfrak{P}}(s; L; |H|^m f^\rho) = c_{\mathfrak{P}}\cdot\varepsilon_{\mathfrak{P}_1}^{-1}$$
$$\times \int_{GL(m;\mathbb{C})/GL(m;\mathcal{O}_K)} \|g\|^{2s_\nu+2k_{\mathfrak{P}}^{(\nu-1)}} Z_{\mathfrak{P}_1}^{(g)}(s_1,\dots,s_{\nu-1}; L_1; \|g\|^{-2k_{\mathfrak{P}}^{(\nu-1)}}\psi^\rho) \sum_{\xi\in L\cap V-S} |H|^m f^\rho(H[\xi\,{}^t\cancel{b}\,g])\,\cancel{db}\,dg$$

$$\tilde{Z}_{\mathfrak{P}}^*(s; L; |H|^m f^\rho) = c_{\mathfrak{P}}\cdot\varepsilon_{\mathfrak{P}_1}^{-1}$$
$$\times \int_{GL(m;\mathbb{C})/GL(m;\mathcal{O}_K)} \|g\|^{2s_\nu+2k_{\mathfrak{P}}^{(\nu-1)}} Z_{\mathfrak{P}_1}^{*(g)}(s_{\nu-2},\dots,s_1, m-s_1-\cdots-s_{\nu-1}; L_1^*; \psi)$$
$$\times \sum_{\xi\in L\cap V-S} |H|^m f^\rho(H[\xi\,{}^t\cancel{b}\,g])\,\cancel{db}\,dg.$$

を考えると、これらは Ω 上の正則函数を表わし、

$$\widetilde{Z}_{\mathfrak{P}}(s : L : |H|^{m} f^{\rho}) = v(L_{1}^{*})\, \widetilde{Z}_{\mathfrak{P}}^{*}(s : L : |H|^{m} f^{\rho})$$

なる関係式を満たす。

この補題の証明は後回しとし、まずこの等式の意味するところを考えてみる。

まず、$\Omega_1 = \{ (s_1, \cdots, s_\nu) \in \mathbb{C}^{\nu} \mid \mathrm{Re}(s_i) > p_i + p_{i+1} \ (i = 1, \cdots, \nu) \}$ 上では、

$(*)_2$ と補題11の(ii)によって、

$$\text{左辺} = \prod_{i=1}^{\nu-1} \prod_{j=0}^{p_i - 1} \zeta_K(s_i + \cdots + s_{\nu-1} - k_{\mathfrak{P}_1}^{*(\nu-i-1)} - j) \int_{\mathcal{H}_1} \psi^{\rho}(w) \prod_{i=1}^{\nu-1} |w[E_{\mathfrak{P}_1}^{(i)}]|^{s_i} \widetilde{dw}$$

$$\times Z_{\mathfrak{P}}(s : L : |H|^{m} f^{\rho})$$

一方、$(*)_3$ によれば、

$$\widetilde{Z}_{\mathfrak{P}}^{*}(s : L : |H|^{m} f^{\rho}) = \left(\frac{4}{|D|} \right)^{\sum_{i=1}^{\nu-1} k_{\mathfrak{P}_1}^{(i)} s_i - m \cdot k_{\mathfrak{P}}^{(\nu-1)}}$$

$$\times \prod_{i=1}^{\nu-1} \prod_{j=0}^{p_{\nu-i}-1} \zeta_K(-s_{\nu-i} - \cdots - s_{\nu-1} + k_{\mathfrak{P}_0}^{*(i+1)} - j) \cdot \int_{\mathcal{H}_1} \psi(w) \prod_{i=1}^{\nu-2} |w[E_{\mathfrak{P}_1}^{*(i)}]|^{s_{\nu-i-1}}$$

$$\cdot |w|^{m - s_1 - \cdots - s_{\nu-1}} \widetilde{dw}^{*}$$

$$\times C_{\mathfrak{P}} \int_{GL(m:\mathbb{C})/GL(m:\mathcal{O}_K)} \|g\|^{2(s_{\nu-1} + s_\nu - p_\nu)} E_{\mathfrak{P}\rho_0}(m - s_1 - \cdots - s_{\nu-1}, s_1, \cdots, s_{\nu-2})$$

$$\times \sum_{\xi \in L \cap V - S'} |H|^{m} f^{\rho}(H[\xi \tfrac{t}{g}])\, dg.$$

ただし、ここで補題10を考慮に入れた。

従って、再度補題11の(i)によって

$$\Omega_2=\left\{(s_1,\cdots,s_k)\in\mathbb{C}^k \;\middle|\; \begin{array}{l} Re(s_i)>p_i+p_{i+1}\ (i=1,\cdots,k-2)\\ m-Re(s_1)-\cdots-Re(s_{k-1})>p_k+p_1\\ Re(s_{k-1})+Re(s_k)>p_{k-1}+p_k+n-m\end{array}\right\}$$

上で、

$$\tilde{Z}^*_{\mathbb{P}}(s:L:|H|^m f^\rho)=\left(\frac{4}{|D|}\right)^{\sum_{i=1}^{k-1}k_{P_1}^{(k-i-1)}s_i-mk_{\mathbb{P}}^{(k-1)}}\prod_{i=1}^{k-1}\prod_{j=0}^{p_{k-i}-1}\zeta_K(-s_{k-i}-\cdots-s_{k-1}+k^{*(i)}_{P_1}-j)$$

$$\times\int_{\mathcal{M}_1}\psi(w)\prod_{i=1}^{k-2}|w[E^{*(i)}_{P_1}]|^{s_{k-i-1}}\cdot|w|^{m-s_1-\cdots-s_{k-1}}\,d\tilde{w}^*$$

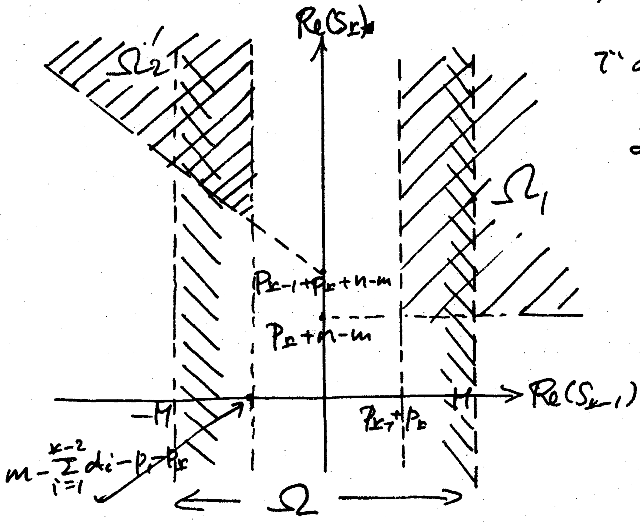
$$\times Z_{\mathbb{P}\sigma_0}(m-s_1-\cdots-s_{k-1},s_1,\cdots,s_{k-2},s_{k-1}+s_k-p_k:L:|H|^m f^\rho)$$

である。

ここで $d_i>Re(s_i)>p_i+p_{i+1}$ $(i=1,\cdots,k-2)$ に制限してみる。

$$\Omega'_2=\left\{(s_1,\cdots,s_k)\in\mathbb{C}^k \;\middle|\; \begin{array}{l} d_i>Re(s_i)>p_i+p_{i+1}\ (i=1,\cdots,k-2)\\ m-\sum_{i=1}^{k-2}d_i-p_1-p_k>Re(s_{k-1})\\ Re(s_{k-1})+Re(s_k)>p_{k-1}+p_k+n-m\end{array}\right\}$$

とおくと $\Omega'_2\subset\Omega_2$。M のとり方に注意すると、Ω, Ω_1, Ω'_2 の間に、下図のような交わりが存在する。($d_i>Re(s_i)>p_i+p_{i+1}$ $(i=1,\cdots,k-2)$ での図である。)



よって、$\tilde{Z}_{\mathbb{P}}(s:L:|H|^m f^\rho)$(従って、$Z_{\mathbb{P}}(s:L:|H|^m f^\rho)$)は、$\Omega\cup\Omega_1\cup\Omega_2$ の convex hull すなわち

$$\left\{(s_1,\cdots,s_k)\in\mathbb{C}^k \;\middle|\; \begin{array}{l} Re(s_i)>p_i+p_{i+1}\\ i=1,\cdots,k-2\end{array}\right\}$$

上の有理型函数へ解析接続される。

$$\begin{cases} s_1 \longmapsto m-s_1-\cdots-s_{k-1} \\ s_2 \longmapsto s_1 \\ \quad\cdots\cdots \\ s_{k-1} \longmapsto s_{k-2} \\ s_k \longmapsto s_{k-1}+s_k-p_k \end{cases}$$

という変換を (#) によって、$z_1,\cdots,z_k$ についての変換に書きなおすと、これは、$\sigma_0=\begin{pmatrix}1, & 2, & \cdots, & k \\ k, & 1, & \cdots, & k-1\end{pmatrix}$ に対し、

$$\{ z_i \longmapsto z_{\sigma_0(i)}, \quad p_i \longmapsto p_{\sigma_0(i)} \mid i=1,\cdots,k \}$$

という変換を行っていることになる。つまり、補題13は、$Z_{\mathbb{P}}(z;L;\mathbb{H}^m, f^\rho)$ と $Z_{\mathbb{P}^{\sigma_0}}(z_{\sigma_0(1)},\cdots,z_{\sigma_0(k)};L;\mathbb{H}^m, f^\rho)$ の間に成立つ函数等式を与えている。

次に、この函数等式を見やすい型に整理してみよう。

命題1と補題1を考慮して書きかえると

$$\pi^{-\sum_{i=1}^{k-1} k_{\mathbb{P}}^{(i)} s_i} \prod_{i=1}^{k-1} \prod_{j=0}^{p_i-1} \Gamma(s_i+\cdots+s_{k-1}-k_{\mathbb{P}_1}^{*(k-i-1)}-j)$$
$$\times \int_{H_1} \psi(w) \prod_{i=1}^{k-2} |w[E_{\mathbb{P}_1}^{*(i)}]|^{s_{k-i-1}} |w|^{m-s_1-\cdots-s_{k-1}} \widetilde{dw^*}$$
$$= \pi^{\sum_{i=1}^{k-1} k_{\mathbb{P}}^{(i)} s_i - m k_{\mathbb{P}}^{(k-1)}} \cdot \prod_{i=1}^{k-1} \prod_{j=0}^{p_{k-i}-1} \Gamma(-s_{k-i}-\cdots-s_{k-1}-k_{\mathbb{P}}^{(i+1)}-j)$$
$$\times \int_{H_1} \psi^\rho(w) \prod_{i=1}^{k-1} |w[E_{\mathbb{P}_1}^{(i)}]|^{s_i} \widetilde{dw}$$

又 $v(L_1^*)=\left(\frac{2}{\sqrt{D}}\right)^{m k_{\mathbb{P}}^{(k-1)}}$ である。

これを利用して、変形すれば、補題13の示すところは、

$$\prod_{i=1}^{\nu-1}\prod_{j=0}^{p_i-1}\eta_K\left(z_\nu - z_i + \frac{p_i+p_\nu}{2} - j\right)\cdot Z_{\mathcal{P}}(z_1,\cdots,z_\nu : L : |H|^\mu f^\varphi)$$
$$= \prod_{i=1}^{\nu-1}\prod_{j=0}^{p_i-1}\eta_K\left(z_i - z_\nu + \frac{p_i+p_\nu}{2} - j\right) Z_{\mathcal{P}^{\sigma_0}}(z_{\sigma_0(1)},\cdots,z_{\sigma_0(\nu)} : L : |H|^\mu f^\varphi)$$

である。補題8と命題2をあわせれば、

$$\prod_{i=1}^{\nu-1}\prod_{j=0}^{p_i-1}\eta_K\left(z_\nu - z_i + \frac{p_i+p_\nu}{2} - j\right) \xi_{\mathcal{P}}(L : z_1,\cdots,z_\nu)$$
$$= \prod_{i=1}^{\nu-1}\prod_{j=0}^{p_i-1}\eta_K\left(z_i - z_\nu + \frac{p_i+p_\nu}{2} - j\right) \xi_{\mathcal{P}^{\sigma_0}}(L : z_{\sigma_0(1)},\cdots,z_{\sigma_0(\nu)})$$

が得られる。すなわち、巡回置換 $\sigma_0 = \begin{pmatrix} 1, & 2, & \cdots, & \nu \\ \nu, & 1, & \cdots, & \nu-1 \end{pmatrix}$ に対する函数等式である。

又、この函数等式によって、$\xi_{\mathcal{P}}(L : z_1,\cdots,z_\nu)$ の $\mathbb{C}^\nu$ 上の有理型函数への解析接続が得られる。実際、今説明したように、$\xi_{\mathcal{P}}(L : z_1,\cdots,z_\nu)$ は、変数 $z_{\nu-1}, z_\nu$ について全平面に解析接続される。右辺を調べれば、$z_{\nu-2}, z_{\nu-1}$ について全平面に解析接続されている。よって、この函数等式で、$\xi_{\mathcal{P}}(L : z_1,\cdots,z_\nu)$ を $z_{\nu-2}$ について全平面で定義できる。以下、σ_0^i $(i=1,2,\cdots)$ に対応する函数等式を利用して、$\xi_{\mathcal{P}}$ の $\mathbb{C}^\nu$ 上への解析接続を得る。

(補題13の証明)

積分 $\tilde{Z}_{\mathcal{P}}(s : L : |H|^\mu f^\varphi)$ が Ω 上で絶対収束することをいえばよい。このとき、函数等式は、$Z_{\mathcal{P}_1}^{(q)}$ の §5-1 で論じた函数等式から直ちに従う。

$f^\varphi \geq 0$ と仮定してよい。以下、絶対値を考えるから、$s_i \in \mathbb{R}$。

補題12により、

$$\int_{GL(m:\mathbb{C})/GL(m:\mathcal{O}_K)} \|g\|^{2(s_r+k_P^{(r-1)})} \left|Z_{P_1}^{(g)}(s_1,\cdots,s_{r-1}:L_1:\|g\|^{-2k_P^{(r-1)}}\varphi^g)\right| \sum_{\xi\in L\cap V-S} |H|^m f^g(H[\xi\,{}^t g])\,dg$$

$$\leqq \int_{GL(m:\mathbb{C})/GL(m:\mathcal{O}_K)} \|g\|^{2s_r} Z_{P_1}^{(g)}(s_1,\cdots,s_{r-2},M:L_1:\varphi_1) \sum_{\xi\in L\cap V-S} |H|^m f^g(H[\xi\,{}^t g])\,dg$$

$$+\,v(L_1^*)\int_{GL(m:\mathbb{C})/GL(m:\mathcal{O}_K)} \|g\|^{2s_r} Z_{P_1}^{*(g)}(s_{r-2},\cdots,s_1,m+M-s_1-\cdots-s_{r-2}:L_1^*:\varphi_2) \sum_{\xi\in L\cap V-S} |H|^m f^g(H[\xi\,{}^t g])\,dg.$$

$$=\int_{GL(m:\mathbb{C})/GL(m:\mathcal{O}_K)} \|g\|^{2s_r} Z_{P_1}^{(g)}(s_1,\cdots,s_{r-2},M:L_1:\varphi_1) \sum_{\xi\in L\cap V-S} |H|^m f^g(H[\xi\,{}^t g])\,dg$$

$$+\,v(L_1^*)\,v(L^*)\int_{GL(m:\mathbb{C})/GL(m:\mathcal{O}_K)} \|g\|^{2s_r+2k_P^{(r-1)}-2m} Z_{P_1}^{*(g)}(s_{r-2},\cdots,s_1,M+m-s_1-\cdots-s_{r-2}:L_1^*:\varphi_2)$$

$$\times \sum_{\eta\in L^*\cap V-S} f(H^{-1}[\eta\,\bar{g}^{-1}])\,dg.$$

Ω上では，$M+m-s_1-\cdots-s_{r-2} > M+m-d_1-\cdots-d_{r-2} > p_1+p_r$ となることに注意する．第一の積分について考えると，$(*)_2$より，

$$積分 = \varepsilon_{P_1}\cdot\prod_{i=1}^{r-1}\prod_{j=0}^{p_i-1}\zeta_K(s_i+\cdots+s_{r-2}+M-k_{P_1}^{*(r-i-1)}-j)\cdot\int_{\mathbb{H}_1}\varphi_1(w)\prod_{i=1}^{r-2}|w[E_{P_1}^{(i)}]|^{s_i}\,|w|^M\,d\tilde{w}$$

$$\times\int_{GL(m:\mathbb{C})/GL(m:\mathcal{O}_K)} \|g\|^{2s_r} E_P(({}^t\bar{g}g)^{-1}:s_1,\cdots,s_{r-2},M) \sum_{\xi\in L\cap V-S} |H|^m f^g(H[\xi\,{}^t g])\,dg$$

$$=\varepsilon_{P_1}\prod_{i=1}^{r-1}\prod_{j=0}^{p_i-1}\zeta_K(s_i+\cdots+s_{r-2}+M-k_{P_1}^{*(r-i-1)}-j)\int_{\mathbb{H}_1}\varphi_1(w)\prod_{i=1}^{r-2}|w[E_{P_1}^{(i)}]|^{s_i}\,|w|^M\,d\tilde{w}$$

$$\times\left\{\int_{\substack{GL(m:\mathbb{C})/GL(m:\mathcal{O}_k)\\ \|g\|\geq 1}} \|g\|^{2s_k+\cancel{\frac{2k(n-1)}{p}-2n}} E_{\mathbb{P}}({}^t\bar{g}g)^{-1}:s_1,\cdots s_{k-2},M)\sum_{\xi\in L\cap V-S}|H|^m f^g(H[\xi\,{}^t\bar{g}])\,dg\right.$$

$$\left.+\,v(L^*)\cdot\int_{\substack{GL(m:\mathbb{C})/GL(m:\mathcal{O}_k)\\ \|g\|\leq 1}} \|g\|^{2(s_k+M+s_{k-2}+\cdots+s_1-n)} E^*_{\mathbb{P}}({}^t\bar{g}g)^{-1}:M\,s_{k-2},\cdots s_1)\sum_{\xi\in L\cap V-S} f(H^{-1}[\eta\bar{g}^{-1}])\,dg\right\}$$

補題11のRemarkによって、これらの積分は収束する。

オ2の積分についても、全く同様であるから省略する。 //

§5-3-2. 互換に対する不変性.

巡回置換に対する函数等式を考慮すれば、$\sigma=(1,2)$について証明すれば十分である。$\sigma=(1,2)$について、$z_1\to z_2$, $z_2\to z_1$, $p_1\to p_2$, $p_2\to p_1$なる変換をs_iの変換に書きなおしてみると.

$$\begin{cases} s_1\longrightarrow t_1=-s_1+(p_1+p_2)\\ s_2\longrightarrow t_2=s_1+s_2-p_2\\ s_i\longrightarrow t_i=s_i \qquad (i=3,\cdots,k)\end{cases}$$

命題2により.

$$Z_{\mathbb{P}^\sigma}(t_1,\cdots t_k:L^*:|H|^m f)=\prod_{j=0}^{p_1-1}\frac{\eta_k(z_2-z_1+\frac{p_1+p_2}{2}-j)}{\eta_k(z_1-z_2+\frac{p_1+p_2}{2}-j)}Z_{\mathbb{P}}(s_1,\cdots s_k:L^*:|H|^m f)$$

を証明すればよい。

νに関する帰納法で証明する。$\nu=2$の時は、$\sigma=\sigma_0$、すなわち、§5-3-1で求めた巡回置換についての函数等式に他ならぬ。

以下、$\nu \geqq 3$とする。

補題9の(2)の条件a)、b)を満足する$f \in S(\mathcal{H}_0)$について、

$$
\begin{aligned}
&Z^*_{\mathbb{P}^\sigma}(t_{\nu-1},\cdots,t_1,n-t_1-\cdots-t_\nu ; L^* : f) \\
&= \int_{GL(m;\mathbb{C})/GL(m;\mathcal{O}_K)} \|g\|^{-2(n-t_1-\cdots-t_\nu)} E^*_{\mathbb{P}^\sigma}({}^t\bar{g}g^{-1} : t_{\nu-1},\cdots,t_1) \sum_{\xi \in L^* \cap D-S} f(H^{-1}[\xi\bar{\xi}^{-1}])\,dg
\end{aligned}
$$

§5-3-1と、同様の条件の下で、

$$
\int_{GL(m;\mathbb{C})/GL(m;\mathcal{O}_K)} \|g\|^{-2(n-t_1-\cdots-t_\nu)} Z^{*(g)}_{\mathbb{P}_2}(t_{\nu-1},\cdots,t_1 ; L_1^* : \psi) \sum_{\xi \in L^* \cap D-S} f(H^{-1}[\xi\bar{\xi}^{-1}])\,dg
$$

$$
\mathbb{P}_2 = (p_1, p_3, \cdots p_\nu)
$$

を考えれば、補題13と同じ論法で、

$$
\tilde{\Omega} = \left\{ (t_1,\cdots,t_\nu) \in \mathbb{C}^\nu \;\middle|\; \begin{array}{l} M > t_1 > -M, \\ d_2 > t_2 > p_1+p_3 \\ d_3 > t_3 > p_3+p_4 \\ \cdots\cdots \\ d_{\nu-1} > t_{\nu-1} > p_{\nu-1}+p_\nu \end{array} \right\}
$$

$M, d_2, \cdots, d_{\nu-1}$は十分大なる正数。($M$は$d_i$に依存する。)

なる領域上で意味を持ち、正則函数を表わす。

さて、

$$
\begin{aligned}
\tilde{\psi}(t_1,\cdots,t_{\nu-1}) &= \varepsilon_{\mathbb{P}_2} \cdot \left(\frac{D}{4}\right)^{\sum_{i=1}^{\nu-1} k^{*(i)}_{\mathbb{P}_2} t_{\nu-i}} \prod_{i=1}^{\nu-1} \prod_{j=0}^{p_{\sigma(\nu-i)}-1} \zeta_K(t_{\nu-i}+\cdots+t_1-k^{(\nu-i-1)}_{\mathbb{P}_2}-j) \\
&\times \int_{H_1} \psi(w) \prod_{i=1}^{\nu-1} |w[E^{+(i)}_{\mathbb{P}_2}]|^{s_i}\,\widetilde{dw^*}
\end{aligned}
$$

とおけば、$(*)_3$ より、

積分 $= \Psi(t_1,\cdots,t_{r-1})\cdot Z^{*}_{P^\sigma}(t_{r-1},\cdots,t_1,n-t_1-\cdots-t_r : L^* : f)$

一方、Poissonの和公式と補題10より、

積分 $= v(L^*)^{-1}\cdot\tilde{\Psi}(t_1,\cdots,t_{r-1})$

$$\times\int_{GL(m:\mathbb{C})/GL(m:O_k)} \|g\|^{2t_r} E_{P^\sigma}([{}^t\bar{g}g]^{-1}:t_1,\cdots,t_{r-1})\sum_{\xi\in L^*\cap T-S} |H|^m f^{\rho}(H[\xi\,{}^t\bar{g}g])\,dg$$

帰納法の仮定によって、

$$E_{P^\sigma}([{}^t\bar{g}g]^{-1}:t_1,\cdots,t_{r-1}) = \prod_{j=0}^{p_1-1}\frac{\eta_k(z_2-z_1+\frac{p_1+p_2}{2}-j)}{\eta_k(z_1-z_2+\frac{p_1+p_2}{2}-j)}\, E_P([{}^t\bar{g}g]^{-1}:s_1,\cdots,s_{r-1})$$

だから、これは、

$$v(L^*)^{-1}\cdot\tilde{\Psi}(t_1,\cdots,t_{r-1})\cdot\prod_{j=0}^{p_1-1}\eta_k(z_2-z_1+\tfrac{p_1+p_2}{2}-j)\Big/\eta_k(z_1-z_2+\tfrac{p_1+p_2}{2}-j)$$

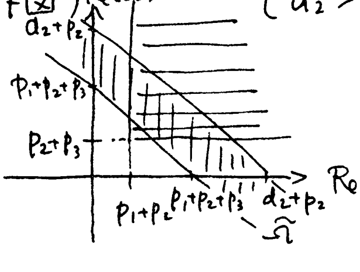
$$\times\int_{GL(m:\mathbb{C})/GL(m:O_k)} \|g\|^{2s_r} E_{P}([{}^t\bar{g}g]^{-1}:s_1,\cdots,s_{r-1})\sum_{\xi\in L^*\cap T-S} |H|^m f^{\rho}(H[\xi\,{}^t\bar{g}g])\,dg$$

従って、$\{\mathrm{Re}(s_i)>p_i+p_{i+1}\ (i=1,\cdots,r)\}$ 上では、この積分は収束し、

積分 $= v(L^*)^{-1}\tilde{\Psi}(t_1,\cdots,t_{r-1})\prod_{j=0}^{p_1-1}\eta_k(z_2-z_1+\frac{p_1+p_2}{2}-j)\Big/\eta_k(z_1-z_2+\frac{p_1+p_2}{2}-j)$

$\times Z_P(s_1,\cdots,s_k:L:|H|^m f^{\rho})$.

さて、$\tilde{\Omega}$ と $\{\mathrm{Re}(s_i)>p_i+p_{i+1}\ (i=1,\cdots,r)\}$ は共通部分を有する ようにできる (cf 下図) ($d_2>p_1+2p_2+p_3$ ととれるから)。



従って、以上の結果をまとめれば、

$$Z_{P^\sigma}(t_1,\cdots,t_r:L^*:|H|^m f) = \prod_{j=0}^{p_1-1}\frac{\eta_k(z_2-z_1+\frac{p_1+p_2}{2}-j)}{\eta_k(z_1-z_2+\frac{p_1+p_2}{2}-j)}\, Z_P(s_1,\cdots,s_k:L^*:|H|^m f)$$

これで、ξ_pに関する函数等式は完全に証明された。ξ_p^*については、函数等式(1)を利用して、この等式を書き直せばよい。

<参考文献>

[1] I.N. Bernstein & S.I. Gel'fand, Meromorphy of the function P^λ, Funct. Anal. & its Appl. 3. 1. (1969) 84-86.

[2] A. Borel, Introduction to automorphic forms, Proc. Symp. Pure Math. IX A.M.S. Providence (1966) 199-210

[3] S. Helgason, Differential geometry and Symmetric spaces. New York, Academic Press (1962)

[4] 柏原-三輪. Micro local calculus と概均質ベクトル空間の相対不変式の Fourier 変換. 数理研講究録 238 (1975) 60-147.

[5] 室正和. Prehomogeneous vector space の相対不変式の Fourier 変換について, 数理研講究録"代数解析学の諸問題" (1975)

[6] H. Maass. Siegel's Modular forms and Dirichlet series, Lect. note in Math, vol 216, Springer, (1971)

[7] 佐藤-新谷. 概均質ベクトル空間の理論. 数学の歩み 15-1

[8] M. Sato and T. Shintani, Zeta functions associated with prehomogeneous vector spaces, Ann. of Math. (1974) 100 131-170

[9]. C.L. Siegel, Lectures on quadratic forms. Tata (1957)

[10] A. Terras. A generalization of Epstein's Zeta function Nagoya Math. Jour. (42) 1971 173-188

[11] A. Terras. Functional equations of generalized Epstein Zeta functions in several complex variables, Nagoya Math. Jour. (44) 1971, 89-95.

[12] A. Weil. Sur certains groupes d'operateurs unitaires, Acta Math. 111 (1964) 143-211.